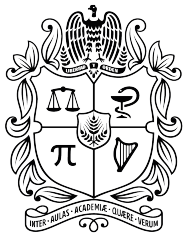
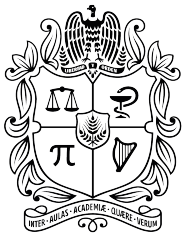


UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Estudio de cortocircuitos en máquinas de inducción empleando la teoría de vectores espaciales para su representación en redes de secuencia

Jamer Arley González Vásquez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura, DIEEyC
Manizales, Colombia
2015



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Short-circuit studies in induction machines using the space vector theory to its representation in sequence network models

Jamer Arley González Vásquez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura, DIEEyC
Manizales, Colombia
2015

Estudio de cortocircuitos en máquinas de inducción empleando la teoría de vectores espaciales para su representación en redes de secuencia.

Jamer Arley González Vásquez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ingeniería Eléctrica

Director:
Profesor: Jorge Fernando Gutiérrez Gómez
Codirectora:
Ph.D Belizza Janet Ruiz Mendoza

Sistemas de potencia:
Fallos en máquinas de inducción
Grupo de Investigación en Potencia, Energía y Mercados (GIPEM)

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura, DIEEyC
Manizales, Colombia
2015

Short-circuit studies in induction machines using the space vector theory to its representation in sequence network models

Jamer Arley González Vásquez

This dissertation is submitted for the degree of:
Master in Engineering - Electric Engineering

Thesis Advisor:
Proffesor: Jorge Fernando Gutiérrez Gómez
Thesis Co-advisor:
Ph.D Belizza Janet Ruiz Mendoza

Power Systems:
Induction Machine Faults
Grupo de Investigación en Potencia, Energía y Mercados (GIPEM)

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería y Arquitectura, DIEEyC
Manizales, Colombia
2015

“Vive como si fueras a morir mañana.
Aprende como si fueras a vivir por siempre.”
Mahatma Gandhi

Dedico este trabajo a mi madre Ruebiela Vásquez López, a mi padre Jario González, a mi hermana Yudy Tatiana González Vásquez, a mi novia Laura Manuela González Salazar, y por último a mi gran amigo Angelo Adrian Quintero Ciprian.

Agradecimientos

Primero que todo quiero darle gracias a Dios por brindarme la oportunidad de realizar este hermoso proyecto de vida. También quiero agradecer de forma muy especial el apoyo de mis padres, hermana, novia y en general de toda mi familia, ya que sin ellos no hubiese sido posible cumplir con esta meta profesional. Adicionalmente deseo agradecerles al profesor Jorge Fernando Gutierrez Gómez, tutor de la tesis, y a la doctora Belizza Janet Ruiz Mendoza cotutora de la misma, por haberme guiado y acompañado durante todo el proceso de la investigación.

Esta investigación se realizó gracias al apoyo de todo el equipo de trabajo del Grupo de Investigación en Potencia, Energía y Mercados (GIPEM), el cual se encuentra asociado a la Facultad de Ingeniería y Arquitectura FIA, de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, igualmente se presentan los agradecimientos al Departamento de Investigación de Manizales - DIMA.

Agradezco de forma muy especial al profesor José Miguel Ramírez, Director Grupo de Investigación en Control Industrial - GICI, y al profesor Edinson Franco por su apoyo durante el proceso de la estancia investigativa realizada en la Universidad del Valle.

Esta tesis fue financiada con recursos provenientes del **FONDO NACIONAL DE FINANCIAMIENTO PARA LA CIENCIA, LA TECNOLOGÍA Y LA INNOVACIÓN FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS** y la **UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MANIZALES** en el marco del proyecto de investigación Convocatoria 643 Colciencias contrato 548 de 2014 - *Planeamiento integrado de la expansión del sistema colombiano de generación y transmisión de energía eléctrica, incluyendo integración de fuentes renovables, almacenamiento, demanda flexible y generación distribuida.*

Resumen

Este trabajo presenta la comparación de tres metodologías que plantean expresiones diferentes para la fuente de tensión transitoria de la máquina de inducción en su modelo de redes de secuencia para el estudio de cortocircuitos simétricos y asimétricos. Para ello se plantea una ecuación de estados de la máquina en términos de vectores espaciales, y se obtiene una solución de los flujos concatenados del estator y del rotor. Esta solución se valida por medio de simulaciones de la corriente de cortocircuito y se compara con la corrientes de cortocircuito obtenidas con el modelo QD0 de la máquina. Finalmente se proponen unas expresiones de tensión transitoria, la primera está basada en dos fuentes de tensión, una de secuencia positiva y otra de secuencia negativa. Esta primera expresión aumenta la exactitud de un modelo que también utiliza dos fuentes de tensión para el estudio de cortocircuitos, y que para efectos de comparación durante el transcurso de esta tesis será nombrado como el modelo de Howard. La segunda expresión propuesta está basada en una sola fuente de tensión que mejora significativamente los errores encontrados con los otros dos enfoques.

Palabras clave: Cortocircuito, máquina de inducción, componentes simétricas, redes de secuencia, vector espacial, estado transitorio.

Abstract

This work presents the comparison between three different approaches of the transient voltage equation of the induction machine sequence network model, in order to perform symmetrical and asymmetrical short circuit studies. In this sense the state equation of the induction machine is presented using space vector notation and solve it in terms of the rotor and stator flux linkages. Simulations of the shortcircuit current are used in order to validate the flux linkages and compared them with the currents obtained with the induction machine model using the QD0 reference frame. Finally two expressions of the transient voltage equations are proposed, the first one include two sources, one for the positive sequence network and the other for the negative sequence network. The first expression increases the accuracy of other model that also uses two power sources for short circuit studies, and in order to perform comparisons during the course of this thesis it will be named as the Howard's model. The second one decreases the errors found with the other two approaches and is based in one transient voltage equation.

Keywords: Short-circuit, induction machine, symmetrical components, sequence networks, space vector, transient period.

Contenido

Agradecimientos vii

Resumen ix

Lista de Figuras xiii

Lista de Tablas xv

1. Marco teórico 3
1.1. Corrientes de cortocircuito 4
1.2. Componentes simétricas y modelo de la máquina de inducción 8
1.2.1. Impedancias de secuencia 9
1.3. Vectores espaciales 12
1.3.1. Representación del vector espacial de ondas espaciales considerando una sola bobina 12
1.3.2. Representación del vector espacial de ondas espaciales considerando varias bobinas 15
1.3.3. Representación de ondas espaciales considerando un devanado trifásico en el estator 16
1.4. Representación de la máquina de inducción en el marco de referencia QD0 . 19

2. Modelado de la corriente de cortocircuito utilizando vectores espaciales 23
2.1. Deducción de las ecuaciones de cortocircuito utilizando la notación de vectores espaciales 23
2.1.1. Solución de la ecuación de estados 24
2.2. Simulaciones y resultados 32
2.2.1. Fallas simétricas 32
2.2.2. Fallas asimétricas 40

3. Modelo de la máquina de inducción en estado transitorio 59
3.1. Deducción de los modelos circuitales 59
3.2. Cálculo de las tensiones transitorias y corrientes de cortocircuito 66

4. Análisis de cortocircuitos en un sistema de potencia con máquinas de inducción 79
4.1. Procedimiento de cálculo 79

4.2. Capacidad de cortocircuito (SCC) 83
4.3. Ejemplo 84

5. Conclusiones **90**

A. Anexo: Parámetros de simulación de las máquinas de inducción **94**

B. Anexo: Diagramas circuitales para los diferentes tipos de fallas **97**

Bibliografía **99**

Lista de Figuras

1-1. Equivalente circuital de la máquina durante una falla trifásica. 4
1-2. Corrientes balanceadas y desbalanceadas con envolventes lineales. 6
1-3. Corriente balanceada con envolventes exponenciales. 7
1-4. Componente DC de la corriente de cortocircuito. 7
1-5. Forma de onda típica de una corriente desbalanceada. 7
1-6. Sistemas de fasores 0,1,2 y a,b,c. 9
1-7. Representación de la máquina de inducción en estado estable. 10
1-8. Máquina de inducción conectado a un equivalente de red. 11
1-9. Marco de referencia qd. Fuente [42]. 19

2-1. Vector espacial de la fmm en un sistema equilibrado. 34
2-2. Transitorio de la corriente espacial durante una falla trifásica. Máquinas de 1, 10, 20, 500 y 2400 hp. 34
2-3. Falla simétrica aplicada a una máquina de 2400 hp. 36
2-4. Falla simétrica aplicada a una máquina de 1 hp. 37
2-5. Velocidades de la máquina de inducción durante un cortocircuito trifásico. . 39
2-6. Representación de las elipses definidas por el vector espacial de fmm en fallas monofásicas. 41
2-7. Vector espacial de la fmm en un sistema desequilibrado debido a una falla monofásica. 41
2-8. Corriente espacial de cortocircuito. Máquina de 2400 hp. 43
2-9. Corriente espacial de cortocircuito. Máquina de 1 hp. 44
2-10.Magnitud y ángulo de los vectores espaciales de corriente de cortocircuito. . 46
2-11.Vector espacial de corriente de cortocircuito en el dominio de la frecuencia. . 47
2-12.Velocidades de las máquinas durante una falla monofásica. 49
2-13.Corrientes instantáneas por fase durante un cortocircuito monofásico. 51
2-14.Corriente espacial de cortocircuito en el tiempo. Falla bifásica. 53
2-15.Corrientes instantáneas de cortocircuito por fase. Falla bifásica. 56
2-16.Velocidades de las máquinas durante una falla bifásica. 57

3-1. Modelos circuitales de la máquina de inducción en estado transitorio. 65
3-2. Circuito de estado estable de la máquina de inducción conectado a un equivalente de red. 67

3-3. Diagrama circuital de la máquina de inducción en estado estable durante un cortocircuito monofásico. 68
3-4. Circuito de estado transitorio de la máquina de inducción durante un cortocircuito monofásico. 71

4-1. Sistema de 13 barras. 86

B-1. Circuitos equivalentes de estado transitorio para fallas monofásicas. 97
B-2. Circuitos equivalentes de estado transitorio para fallas bifasicas. 98
B-3. Circuitos equivalentes de estado transitorio para fallas bifasicas a tierra. . . . 98
B-4. Circuito equivalente de estado transitorio para fallas trifásicas. 98

Lista de Tablas

2-1. Error cuadrático medio. Falla Trifásica. 39
2-2. Error cuadrático medio para las corrientes espaciales de cortocircuito 47
2-3. Error cuadrático medio. Falla monofásica. 50
2-4. Error cuadrático medio. Falla bifásica. 56

3-1. Valores de prefalla 67
3-2. Valores de las corrientes y flujos de estado estable. 69
3-3. Valores propios y vectores propios de la máquina. 70
3-4. Errores de las corrientes de cortocircuito 74
3-5. Máquina de 1 hp. 75
3-6. Máquina de 10 hp. 75
3-7. Máquina de 20 hp. 75
3-8. Máquina de 500 hp. 75
3-9. Máquina de 2400 hp 76

4-1. Datos de prefalla 85

A-1. Parámetros de simulación para las diferentes máquinas 94
A-2. Datos de las máquinas 94
A-3. Datos de línea 95
A-4. Datos de los transformadores 95
A-5. Datos de las barras 95
A-6. Datos de los generadores 96

Introducción

La teoría de las componentes simétricas fue publicada en 1918 por Charles L. Fortescue perteneciente a la compañía manufacturera Westinghouse. Esta teoría fue propuesta como una consecuencia de diversos estudios que Fortescue realizó en una máquina de inducción cuando era sometida a condiciones desbalanceadas. En la convención anual de la AIEE el 28 de junio de 1918, en Atlantic City, Fortescue presentó el artículo "*Method of Symmetrical Co-ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*" publicado posteriormente en AIEE Transactions, volumen 37, en donde parte de la temática se dedicó al desarrollo de la discusión presentada por los ingenieros electricistas J. Slepian, C. P. Steinmetz, V. Karapetoff, A. M. Dudley, Charles F. Scott, y C. O. Mailloux sobre dicho tema.

La aplicación del método propuesto en el artículo titulado "*To the study of short-circuits and system disturbances*" y el método de cálculo que conocemos hoy, fue desarrollado por C. F. Wagner y R. D. Evans. Ellos comenzaron a escribir una serie de artículos en la revista de Westinghouse llamada "*The Electrical Journal*" desde marzo de 1928 hasta noviembre de 1931. En 1933 estos dos autores publicaron el libro "*Symmetrical Components*" editado por McGraw-Hill Book Company, New York. El ingeniero de la Westinghouse, W. A. Lewis, desarrolló el concepto de la división de la reactancia de la línea en componentes que fue incluido en el apéndice (VII) en el capítulo 11, del mismo libro.

En 1937 el científico E. L. Harder proporcionó tablas de fallas y conexiones desbalanceadas que fueron presentadas en el artículo "*Sequence Networks Connections*"de la revista "*The Electrical Journal*". Durante este tiempo, Edith Clarke de la *General Electric* desarrolló una serie de notas y escritos en el área de los cortocircuitos, pero no fue sino hasta 1943 cuando realizó una publicación formal [1].

En 1971 los científicos S. Kalsi , B. Adkins y D. Stephen realizaron cálculos más exhaustivos sobre las corrientes que se generaban debido a las máquinas de inducción, y en 1995 el ingeniero Paul M. Anderson publicó el libro titulado "*Analysis of Faulted Power Systems*" en donde describió los diferentes tipos de análisis de fallas que podrían ocurrir en un sistema de potencia [2–7].

En el 2004 se realizaron estudios sobre protecciones con sistemas de generación eólica basados en máquinas de inducción [8], y en el 2007 Nasser Tleis publicó el libro "*Power systems mo-*

delling and fault analysis: theory and practice" en donde incluyó análisis de fallas estipuladas por normas internacionales y algunos elementos basados en electrónica de potencia [9–13]. Trabajos posteriores dedicarón sus investigaciones a los estudios de cortocircuito con generadores de inducción, cuyas aplicaciones van desde generación distribuida con aplicación eólica hasta fallos en sistemas de transimisión en parques offshore [14–20].

En el año 2012 los investigadores Dustin F. Howard, Thomas G. Habetler y Ronald G. Harley publicaron el artículo titulado "*Improved Sequence Network Model of Wind Turbine Generators for Short-Circuit Studies*", en donde se presentan evidencias sobre los errores encontrados en los cálculos de las corrientes de cortocircuito derivados de las suposiciones que se realizan para representar las máquinas de inducción en componentes simétricas [21–23].

El presente trabajo se centra entonces en el modelamiento de la máquina de inducción en componentes simétricas para su representación en estado transitorio utilizando la teoría de los vectores espaciales [24]. Para tal fin se soluciona la ecuación de estados de la máquina y se validan los resultados por medio de las funciones de corrientes de cortocircuito para despues proceder a proponer metodologías para el cálculo de las tensiones transitorias.

Es entonces como en el Capítulo 1 se presenta los conceptos sobre componentes simétricas, modelo de la máquina en el marco de referencia QD0 y modelo de la máquina en redes de secuencia. Adicionalmente, se presenta la teoría del vector espacial junto con simulaciones de la corriente de cortocircuito para diferentes tipos de fallas. El Capítulo 2 presenta la solución de la ecuación de estados de la máquina con notación de vectores espaciales y simulaciones comparativas entre diferentes métodos. En el Capítulo 3 se presentan los modelos circuitales propuestos en la investigación y se comparan con la metodología de Howard y la metodología clásica, además en el Capítulo 4 se presenta un ejemplo de cálculo donde se utiliza un sistema de potencia con dos máquinas de inducción conectadas a barras diferentes.

1. Marco teórico

Los análisis de cortocircuitos se realizan para asegurar la integridad humana, para dimensionar los equipos de protección que se deben implementar en los sistemas eléctricos y en general para aumentar la confiabilidad de los mismos. Equipos eléctricos como interruptores pueden fallar si éstos están sujetos a fallas que superan sus capacidades de diseño. Otros equipos como barrajes, transformadores y cables pueden fallar térmica o mecánicamente si se someten a fallas que excedan sus valores de corriente nominales. Los análisis de cortocircuito también se llevan a cabo en el cálculo de los potenciales que se generan en las subestaciones y torres que llevan líneas aéreas. Además, los cálculos de las corrientes mínimas de cortocircuito se realizan para desarrollar la configuración adecuada de los sistemas de protección para así proporcionar operaciones seguras en las instalaciones eléctricas. Por otra parte, el cálculo de las corrientes máximas se llevan a cabo para diseñar los sistemas de protecciones que requieren las subestaciones.

En los sistemas de transmisión las corrientes de cortocircuito deben ser extintas muy rápidamente, esto se debe a que el sistema podría entrar en un estado de pérdida de sincronismo. En consecuencia, las plantas generadoras pueden salir de operación ocasionando apagones y pérdidas economicas muy importantes.

Éstos estudios también se llevan a cabo como parte inicial de una evaluación de la calidad de la potencia desde la conexión de cargas distribuidas hasta las redes eléctricas de potencia, de esta forma los fabricantes de protecciones eléctricas diseñan sus equipos para asegurar que éstos sean capaces de soportar las corrientes de falla por determinados periodos de tiempo [2, 3, 25].

Naturaleza de las fallas

Una operación anormal en el sistema de potencia involucra fallas en los equipos de operación en una de sus tensiones primarias dentro del sistema. Usualmente se pueden encontrar dos tipos de fallas, la primera se debe a fallas en aislamiento que resultan en cortocircuitos y que se pueden deber a sobreestres y degradación del aislamiento a través del tiempo debido a sobretensiones. La segunda falla está asociada a circuitos abiertos las cuales se caracterizan porque no existe un flujo de corriente en la red.

Varias fallas pueden ocurrir de forma simultánea, las cuales pueden ser del mismo tipo e

incluso pueden ocurrir en el mismo lugar, sin embargo la probabilidad de que esto ocurra es baja. Por ejemplo, cuando un conductor en una línea aérea cae a tierra se da un cortocircuito monofásico, y una apertura del circuito exactamente en el mismo punto. La mayoría de fallas no cambian durante el periodo de falla, es decir que una falla monofásica tiende a seguir siendo monofásica y no involucrar otras fases. Sin embargo existen casos en los cuales esto puede suceder, tal es el caso cuando una fase hace contacto con tierra y después se involucra una segunda fase por medio de un arco eléctrico, y de esta forma la falla se transforma en una falla doble línea a tierra.

Existen diversos factores que pueden ocasionar cortocircuitos, entre los cuales se pueden encontrar tanto acciones humanas como fenómenos naturales. Por ejemplo, se estima que las descargas atmosféricas ocasionan alrededor del 77 % de las fallas monofásicas en una línea aérea, siendo la falla monofásica el tipo de cortocircuito que presenta mayor ocurrencia con una estimación del 67 %, mientras que las fallas línea-línea presentan un 25 % de ocurrencia, y finalmente las fallas doble línea a tierra y fallas trifásicas presentan porcentajes de participación de alrededor del 5 % y 3 % respectivamente [4, 5, 11].

1.1. Corrientes de cortocircuito

Los sistemas de potencia se caracterizan por ser sistemas grandes, complejos y con dinámicas no lineales. Es por esto que se genera la necesidad de realizar cálculos simplificados que no requieran tanto esfuerzo computacional. En este orden de ideas se procede a obtener los equivalentes circuitales para encontrar las expresiones de cortocircuito que describan la red ante un instante de falla. Es por esto que una representación monofásica se obtiene durante el periodo de falla trifásica a tierra, ya que por definición este tipo de falla se considera simétrica y balanceada, y por lo tanto es posible determinar las ecuaciones relacionadas con la corriente [23, 25–28]. Se analizará entonces un caso simple de un circuito $R - L$ con una fuente de tensión constante, que ilustra de forma general el estado de la red ante un cortocircuito, ver Figura **1-1**.

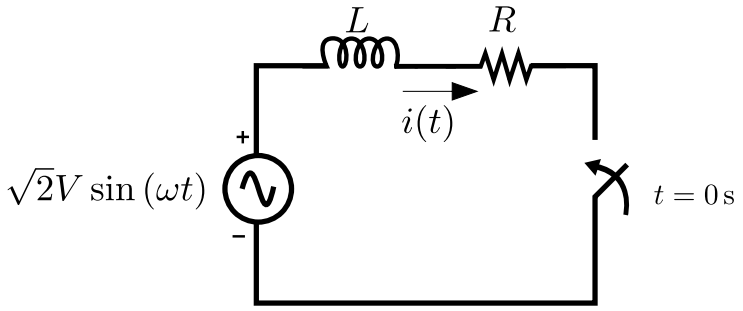


Figura 1-1.: Equivalente circuital de la máquina durante una falla trifásica.

Al aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff (KVL) se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\sqrt{2}V \sin \omega t = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \ . \tag{1-1}$$

La solución para la Ecuación 1-1 en términos de la corriente está dada por:

$$i\left(t\right) = \left[i\left(T_0\right) - \frac{\sqrt{2}V}{Z}\sin\left(\omega T_0 - \alpha\right)\right] e^{-\omega(t-T_0)R/X} + \frac{\sqrt{2}V}{Z}\sin\left(\omega t - \alpha\right) \ , \tag{1-2}$$

donde $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, $X = \omega L$, $\alpha = \tan^{-1} X/R$, $\omega = 2\pi f$, f es la frecuencia y T_0 es el tiempo de falla. El primer término de la Ecuación 1-2 representa la componentes DC y la componente transitoria. Estas se desvanecen en el tiempo hasta alcanzar una magnitud igual a cero, debido a que están acompañadas por un término exponencial decreciente. El segundo término hace referencia a la componente de estado estable que está definida como una función sinusoidal, y cuyo valor máximo de la componente alterna se genera cuando $\omega t - \alpha = 90°$. La corriente de cortocircuito depende entonces del valor máximo de la fuente y de la impedancia equivalente Thevenin de la red eléctrica. Además, la relación X/R y el ángulo de fase ωt son aquellas variables que cambian la magnitud inicial de la corriente de falla. Cuando $t = 0$, tanto la componente AC como la DC tienen la misma magnitud pero el desfase es de 180°, esto se debe a que $i(0-) = i(0+)$ y a que las inductancias no permiten cambios instantáneos de corriente.

Se pueden definir entonces algunos términos importantes para los análisis clásicos de las corrientes de cortocircuito basados en el circuito de la Figura **1-1** y en la Ecuación 1-2, [23, 26].

Nivel de cortocircuito

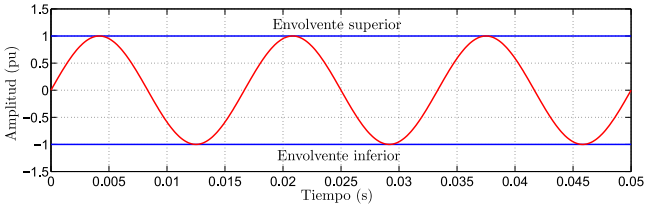
El nivel de cortocircuito de un sistema eléctrico está definido como el valor máximo de la corriente que se presentará en un punto determinado, considerando que aspectos externos como arcos eléctricos no afectan la magnitud de dicha corriente. Esta corriente está asociada directamente con la capacidad de las fuentes generadoras y es independiente de la corriente de carga del circuito, esto siempre y cuando se considere que no hay impedancia de falla. Entre más grande sea la capacidad de las fuentes de generación mayor será el nivel de cortocircuito. La magnitud y la duración de la corriente de cortocircuito dependen fundamentalmente del tipo de falla, las fuentes de corriente conectadas en el sistema, las impedancias entre las fuentes y el punto donde ocurre la falla.

Corrientes balanceadas y desbalanceadas

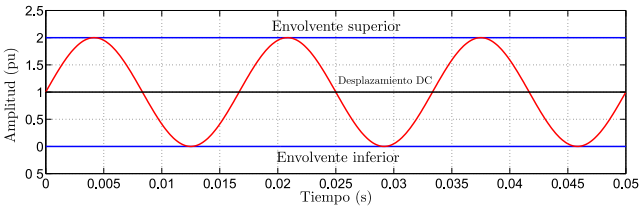
Estos términos hacen referencia a la forma de onda que la corriente describe alrededor del eje de la abscisa, y que está caracterizada por las envolventes que se definen tanto por los

picos positivos como por los picos negativos de la onda de corriente alterna. Si las envolventes son balanceadas, es decir que tienen la misma forma respecto al eje x, entonces se dice que la corriente es balanceada, en caso contrario se define como una corriente desbalanceada.

En la Figura 1.2(a) se puede observar una corriente con envolventes lineales; como ambas envolventes tienen la misma magnitud pero con signo contrario, entonces se dice que la corriente es balanceada. Es posible tener una corriente con el mismo tipo de envolventes pero con un desplazamiento que es atribuible a la componente DC de la corriente, ver Figura 1.2(b). Esta corriente entonces se define como corriente desbalanceada pese a que presenta un comportamiento de estado estable completamente sinusoidal.



(a) Forma de onda de una corriente simétrica.



(b) Forma de onda de una corriente asimétrica debido a una componente DC.

Figura 1-2.: Corrientes balanceadas y desbalanceadas con envolventes lineales.

La cantidad de desplazamiento que se genera en la forma de onda de corriente depende de las impedancias de la red y del tiempo de falla, ya que éste determina la magnitud de la tensión en el momento del cortocircuito. Una red en la que se consideran tanto las resistencias como las reactancias, tendrá una componente DC que se va desvaneciendo a medida que pasa el tiempo, ver Figura **1-3**. Esta forma de onda de la corriente de cortocircuito es típica en las máquinas de inducción debido a que la cantidad de energía almacenada en las máquinas es limitada, y por lo tanto la componente de estado estable no existe durante fallas trifásicas.

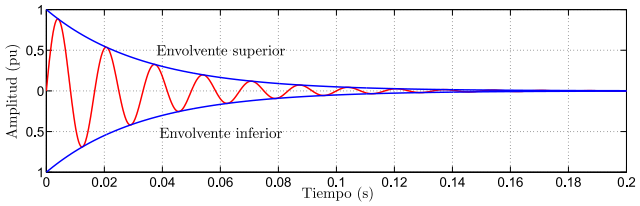


Figura 1-3.: Corriente balanceada con envolventes exponenciales.

Generalmente las corrientes de cortocircuito son desbalanceadas los primeros ciclos después de la ocurrencia de la falla. Estas corrientes poseen tanto la componente alterna como la componente directa, la cual se ilustra en la Figura **1-4**.

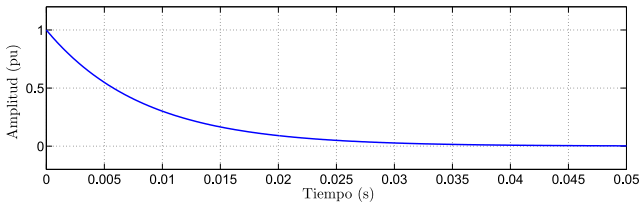


Figura 1-4.: Componente DC de la corriente de cortocircuito.

Una corriente típica de cortocircuito desbalanceada se compone entonces por una componente AC y una DC, tal como muestra la Figura **1-5**. Las líneas azules permiten observar cómo es el desbalance que la corriente presenta, ya que no existe una simetría en los picos de la corriente alterna.

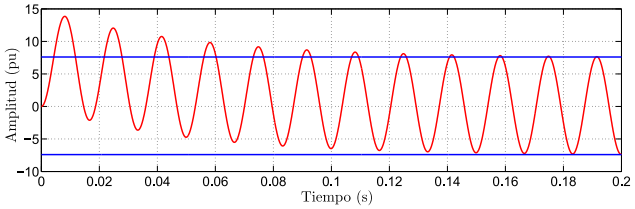


Figura 1-5.: Forma de onda típica de una corriente desbalanceada.

Corriente máxima

El cálculo de la corriente instantánea máxima tiene en cuenta cual es el tiempo de falla que produce la magnitud mayor de la componente DC y por ende se está considerando el peor escenario que se puede encontrar en la corriente de cortocircuito. Si se asume que la relación X/R es muy grande, entonces el ángulo α se puede aproximar a 90°. Es entonces como se asume que la corriente máxima de cortocircuito ocurre medio ciclo después del tiempo de

falla ($T_0 + 1/120\ s$).
La ecuación que describe la corriente máxima de cortocircuito está dada por:

$$I_{pk} = \sqrt{2} I_{ac,rms} \left(1 + e^{-\omega R/(120X)}\right) \ . \tag{1-3}$$

Valor RMS de la corriente en el primer ciclo

En este caso también se tendrá en cuenta la componente DC de la corriente de cortocircuito. Debido a que la forma de onda de corriente en los primero ciclos no es periódica[1], se toma el valor de la componente DC en el primer ciclo $T_0 + 1/120\ s$. Es así como se obtiene el valor RMS de la corriente en el primer ciclo tal como se muestra en la siguiente ecuación:

$$I_{RMS} = I_{ac,rms} \sqrt{1 + 2e^{-\omega R/(60X)}} \ . \tag{1-4}$$

Corriente de despeje

Este valor corresponde al valor RMS de la corriente que un dispositivo de protección debe procesar para poder interrumpir la falla en un tiempo determinado después de la ocurrencia de la misma. El tiempo de despeje depende del diferentes factores como: nivel de tensión, coordinación de protecciones etc., y puede variar en rangos desde 1,5 ciclos hasta varios ciclos después de la falla.

$$I_{rms}\left(T_{int}\right) = I_{ac,rms} \sqrt{1 + 2e^{-2\omega (T_{int} - T_0) R/X}} \ , \tag{1-5}$$

donde T_{int} es el tiempo de interrupción de la falla.

Corriente de estado estable

Ésta es la corriente que permanece después de que el momento transitorio desaparece. Esta corriente se puede determinar a partir del circuito de la Figura **1-1**, así:

$$I_{ac,rms} = \frac{V_{rms}}{Z} \ . \tag{1-6}$$

1.2. Componentes simétricas y modelo de la máquina de inducción

Las componentes simétricas se utilizan para representar diferentes tipos de fallas desbalanceadas como por ejemplo, falla línea a tierra, falla línea-línea, y falla doble línea a tierra. Esta metodología fue propuesta por Charles Legeyt Fortescue en su artículo titulado *"Method of Symmetrical Co-Ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks"* en 1918. En este

[1] Esto se debe a que existe una componente DC exponencial.

se explica como es posible descomponer un sistema compuesto por n fases, en n sistemas equilibrados de secuencias positivas y negativas, más uno de secuencia cero en donde los fasores tienen la misma magnitud y ángulo [4, 10, 29].

La Figura **1-6** muestra la representación de un sistema trifásico de tensiones de fase desbalanceado, y su equivalente en redes de secuencia. Por convención la dirección de rotación de los fasores de secuencia positiva se da en sentido antihorario y la rotación de los fasores de secuencia negativa se da en sentido horario.

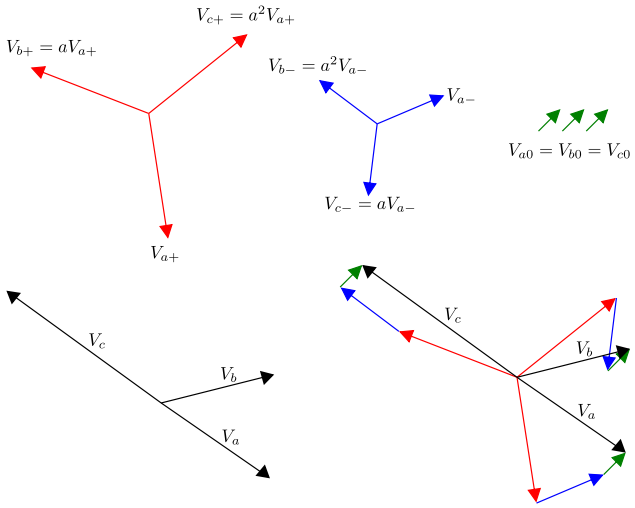


Figura 1-6.: Sistemas de fasores 0,1,2 y a,b,c.

La transformada de Fortescue se define entonces por medio de la matriz de transformación **A**, la cual permite obtener los valores de fase de una cantidad eléctrica en término de sus equivalentes en redes de secuencia. De igual forma es posible realizar el proceso contrario dado que la inversa de la matriz **A** existe.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} , \tag{1-7}$$

donde el operador a es igual a $1\angle 120°$.

1.2.1. Impedancias de secuencia

Este término hace referencia a la impedancia que se observa cuando corrientes de diferentes secuencias fluyen por la máquina. En el caso más general se da que las impedancias mutuas y las impedancias propias son diferentes, por lo tanto estas constituyen un sistema desbalanceado de impedancias complejas que producen caídas de tension desbalanceadas [4]. Es

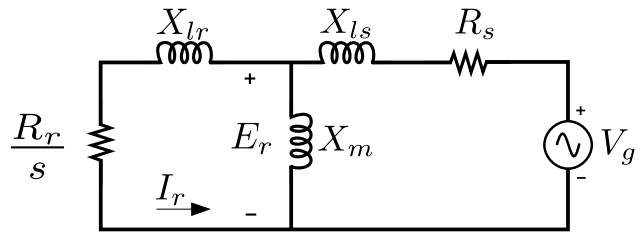
de esta forma como se puede definir la matriz de impedancias de secuencia empleando la Ecuación 1-7 así:

$$\mathbf{Z}_{012} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_{abc}\mathbf{A} \ . \tag{1-8}$$

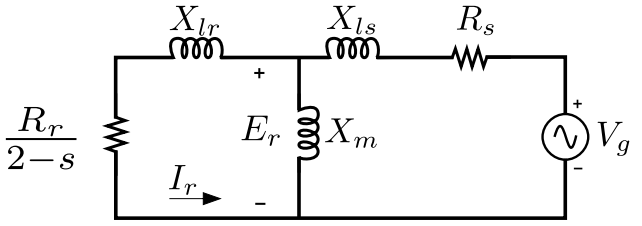
Esta expresión indica que las impedancias de un circuito se pueden representar en redes de secuencia. El caso de la máquina de inducción se presentará a continuación.

Representación de la máquina de inducción en redes de secuencia

Las figuras 1.7(a) y 1.7(b) representan los modelos equivalentes de la máquina de inducción en estado estable [2], los cuales permiten realizar análisis de fallas asimétricas. Cuando existe un desbalance de tensión, aparecen unas tensiones de secuencia negativa que alimentan la máquina. Esto genera una onda de fuerza magnetomotriz que va en sentido contrario produciendo una fuerza magnética de frenado. Si la máquina está conectada a una fuente de tensión de secuencia negativa entonces la impedancia del rotor va a estar afectada por un cociente de $2 - s$, que resulta en el modelo de estado estable ilustrado en la 1.7(b).



(a) Secuencia positiva



(b) Secuencia negativa

Figura 1-7.: Representación de la máquina de inducción en estado estable.

Típicamente el análisis de redes de secuencia se divide en tres segmentos de tiempo que son: el estado subtransitorio, el estado transitorio y el estado estable. Para los análisis de fallas los estados subtransitorio y transitorio son de especial interés ya que éstos presentan magnitudes de corrientes grandes. La representación de la máquina en éstos periodos de tiempo

[2] No se tiene en cuenta la resistencia shunt [30].

está compuesta por una reactancia y una fuente de tensión que varían sus expresiones dependiendo del periodo analizado. Los efectos del estado subtransitorio causan un incremento en la magnitud de la corriente de falla inmediatamente después de que la falla ocurre, pero generalmente se desvanece mucho más rápido que la componente transitoria.

Usualmente la reactancia subtransitoria se usa para determinar la capacidad de interrupción de los disyuntores, mientras que la reactancia transitoria se utiliza para estudios de fallas, en la aplicación de coordinación y configuración de relés y estabilidad transitoria [31–33].

La representación de la máquina en redes de secuencia es calculada utilizando el circuito de la Figura **1-8**, [22, 34–38].

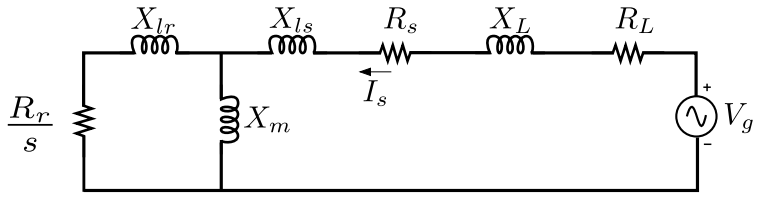


Figura 1-8.: Máquina de inducción conectado a un equivalente de red.

La corriente que fluye por el circuito de estado estable se puede calcular de la siguiente manera:

$$I_s = \frac{V_g}{Z_L + Z_e} \,, \tag{1-9}$$

donde:

$$\begin{aligned} Z_L &= R_L + jX_L \\ Z_e &= R_s + jX_{ls} + \frac{jX_m(R_r/s + jX_{lr})}{R_r/s + j(X_m + X_{lr})} \,. \end{aligned} \tag{1-10}$$

Así la reactancia transitoria X' y la tensión transitoria V' están definidas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} X' &= X_{ls} + \frac{X_m X_{lr}}{X_m + X_{lr}} \\ V' &= V_g - (R_s + R_L)\, I_s - j\,(X' + X_L)\, I_s \,. \end{aligned} \tag{1-11}$$

Esta metodología entonces se define como la metodología clásica para el cálculo de las corrientes transitorias en la máquina de inducción durante cortocircuitos, y servirá como el método de comparación para los modelos estudiados en esta tesis.

1.3. Vectores espaciales

En la teoría clásica para análisis de circuitos en corriente alterna, donde las tensiones y las corrientes son funciones sinusoidales en el tiempo, se acostumbra a realizar su representación por medio de fasores complejos. En las máquinas de corriente alterna, ciertas variables como por ejemplo la densidad de flujo y las fuerzas magnetomotrices, se pueden considerar como funciones periódicas las cuales pueden ser representadas por medio de sus componentes armónicas. Estas componentes se encuentran distribuidas alrededor de la periferia de la máquina en su entrehierro de forma sinusoidal.

Análogamente a la representación de las variables eléctricas como fasores temporales, las ondas sinusoidales que se encuentran distribuidas a lo largo del espacio del entrehierro, pueden ser representadas por fasores espaciales o también llamados vectores espaciales [39]. El concepto de vectores espaciales se explicará más a fondo en la siguiente sección.

1.3.1. Representación del vector espacial de ondas espaciales considerando una sola bobina

A lo largo del interior y exterior del entrehierro de las máquinas eléctricas, se encuentran distribuidos múltiples conductores. Estos conductores transportan corriente creando así un campo magnético que varía no solo en el tiempo sino también en el espacio. Dichas variaciones generan impactos importantes en el estado estable y en el estado transitorio de la máquina.

Para entender el concepto de vector espacial se procede entonces a calcular el campo magnético que produce una bobina, para así después analizar los efectos que se generan al aumentar el número de bobinas (Subsección 1.3.2). Se asume entonces una máquina de polos lisos con una bobina 'a' de paso completo en el estator. Los lados de la bobina son $a - a'$ respectivamente, la corriente instantánea que fluye por dicha bobina es $i_a(t)$, y el número de vueltas de esta bobina es igual a N_a. Para efectos de simplificación se asume permeabilidad infinita en el hierro, los efectos del flujo concatenado con el final de la bobina son despreciables y la densidad del flujo en el entrehierro es radial. Además, los conductores incrustados en las ranuras del estator están situados en la superficie del estator y el desplazamiento de la bobina 'a' respecto al eje real del marco de referencia estacionario es θ_a [3]. La fuerza magnetomotriz total (f.m.m) de la bobina es $N_a i_a(t)$. Ésta tiene una distribución rectangular la cual puede ser encontrada por medio de sus componentes de armónicos espaciales utilizando series de Fourier así [39]:

$$f_a(\theta) = \frac{4}{\pi} F_a \{ \sin(\theta - \theta_a) + \frac{1}{3} \sin[3\theta - \theta_a] + \frac{1}{5} \sin[5\theta - \theta_a] + \cdots \} . \tag{1-12}$$

[3] El marco de referencia se fija al estator de la máquina.

Si se considera únicamente el primer término de la Ecuación 1-12, se puede obtener la componente fundamental de la distribución de la f.m.m. de la siguiente manera:

$$f_{1a}(\theta,t) = \frac{2}{\pi} N_a i_a \sin(\theta - \theta_a) = F_{1a} \sin(\theta - \theta_a) \ , \tag{1-13}$$

donde F_{1a} es la amplitud de la componente fundamental de la f.m.m. siendo igual a $2N_a i_a/\pi$. Es posible asumir que los armónicos de orden mayor como los armónicos 3, 5, etc., son despreciables, dando como resultado una bobina equivalente. Esta bobina equivalente produce una onda de f.m.m. cuya magnitud es igual a la componente fundamental de la onda de f.m.m. si los aportes de los demás armónicos no se tienen en cuenta.
Es posible entonces reescribir la Ecuación 1-13 como sigue:

$$f_{1a}(\theta,t) = F_{1a} \cos(\theta - \theta_a - \pi/2) = \Re\left(F_{1a} e^{j\theta_a} e^{j\pi/2} e^{-j\theta}\right) = \Re(\vec{F}_{1a} e^{-j\theta}) \ , \tag{1-14}$$

donde $\vec{F}_{1a}$ es el vector espacial complejo de la f.m.m. de la bobina 'a', esto siempre y cuando solo se considere la componente fundamental de los armónicos espaciales.
Dicha componente se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{F}_{1a} = j F_{1a} e^{j\theta_a} = j \frac{2}{\pi} N_a i_a e^{j\theta_a} \ . \tag{1-15}$$

Si se toma θ_a igual a $-\pi/2$, entonces la expresión del vector espacial complejo se vuelve:

$$\vec{F}_{1a} = F_{1a} = \frac{2}{\pi} N_a i_a e^{j0} \ , \tag{1-16}$$

donde e^{j0} es un vector unitario en la dirección del eje real. De esta forma se puede decir que F_{1a} es una cantidad real que apunta en la dirección del eje real y que coincide con el eje magnético de la bobina 'a'. En este orden de ideas es posible definir el vector espacial de la corriente en la bobina 'a' como:

$$\vec{i_a} = i_a(t) e^{j0} \ . \tag{1-17}$$

La distribución de la densidad de corriente debida a la bobina 'a' se denota como J_a, y ésta se obtiene al considerar que la distribución de f.m.m. es igual a la integral de la distribución de la densidad de corriente. Es así como se obtiene la siguiente expresión para la forma general de la distribución de la densidad de corriente:

$$J_a(\theta) = \frac{2}{\pi} N_a i_a \{\cos(\theta - \theta_a) + \frac{1}{3}\cos\left[3(\theta - \theta_a)\right] + \frac{1}{5}\cos\left[5(\theta - \theta_a)\right] \cdots\} \ , \tag{1-18}$$

donde su componente fundamental está dada por:

$$J_{1a}(\theta) = \frac{2}{\pi} N_a i_a \cos(\theta - \theta_a) \ , \tag{1-19}$$

reescribiendo la Ecuación 1-19 en notación compleja, se obtiene:

$$J_{1a}(\theta,t) = \Re\left[\frac{2}{\pi}N_a i_a e^{j\theta_a}e^{-j\theta}\right] = \Re(\vec{J}_{1a}e^{-j\theta}) \ , \tag{1-20}$$

donde $\vec{J}_{1a}$ es el vector espacial complejo de la densidad de corriente producido por la bobina 'a', esto siempre y cuando se considere la componente fundamental de los armónicos espaciales[4].

Si se considera $\theta_a = -\pi/2$ se obtiene la siguiente expresión para $\vec{J}_{1a}$:

$$\vec{J}_{1a} = \frac{2}{\pi}N_a i_a(t)e^{j\theta_a} = \vec{F}_{1a}e^{-j\pi/2} = -j\vec{F}_{1a} = -jF_{1a} \ . \tag{1-21}$$

Al realizar las suposiciones mencionadas anteriormente, la f.m.m. $f_{1a}(\theta,t)$ resulta en una distribución de la densidad de flujo $B_{1a}(\theta,t)$. Debido a que el entrehierro es uniforme su longitud (δ) es constante y por lo tanto:

$$B_{1a}(\theta,t) = \frac{\mu_0}{\delta}f_{1a}(t) = \mu_0\frac{2}{\delta\pi}N_a i_a\cos\theta \ , \tag{1-22}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío, así $B_{1a}(\theta,t)$ tiene una forma similar a f_{1a}.
El vector espacial de la onda de densidad de flujo producido por la bobina 'a' es igual al producto de μ_0/δ y el vector espacial $\vec{F}_{1a}$, de esta forma se tiene que:

$$\vec{b}_{1a} = \frac{\mu}{\delta}\vec{F}_{1a} \ , \tag{1-23}$$

de igual manera:

$$\vec{b}_{1a} = \mu_0\frac{2}{\delta\pi}N_a i_a e^{j0} = \mu_0\frac{2}{\delta\pi}N_a\vec{i} \ . \tag{1-24}$$

La distribución de flujo total en el entrehierro producida por la bobina 'a', puede ser encontrada al considerar la Ecuación 1-24; de acuerdo con la cual, el valor pico de la distribución de la densidad de flujo es $\hat{B}_{1a} = (\mu_0 2/\delta\pi)\,N_a i_a$. En consecuencia, el flujo del entrehierro por cada polo debe ser representado por medio de la integral de la densidad de flujo sobre el área del polo.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\hat{B}_{1a}\cos\theta_a lr\right]d\theta = 2\hat{B}_{1a}lr \ , \tag{1-25}$$

donde l es la longitud axial del estator y r es el radio del entrehierro.
Se deduce entonces que el vector espacial del flujo en el estator debido a la corriente i_a toma la siguiente forma:

$$\vec{\phi}_{1a} = \frac{4\mu_0 lr}{\delta\pi}N_a i_a e^{j0} = \frac{2\mu_0 lD}{\delta\pi}N_a\vec{i}_a \ , \tag{1-26}$$

[4] Un vector espacial representa la notación compleja de una distribución sinusoidal en el espacio y por ende no representa necesariamente un vector físico.

donde D es el diámetro del entrehierro. Así el vector espacial del flujo concatenado en el estator se representa de la siguiente manera:

$$\vec{\Psi}_{1a} = N_a\vec{\phi}_{1a} = \frac{2\mu_0 lD}{\delta\pi}N_a^2\vec{i}_a = L_a\vec{i}_a \ , \tag{1-27}$$

siendo L_a la autoinductancia de la bobina 'a'. A continuación se considerará el caso para varias bobinas.

1.3.2. Representación del vector espacial de ondas espaciales considerando varias bobinas

Al considerar un devanado en el estator que contiene N_{sA} bobinas idénticas, que transporta una corriente $i_{sA} = i_a$, y que dichas bobinas son de paso completo conectadas en serie, entonces la f.m.m. por polo es igual a $N_{sA}i_a(t)/2$. Si el devanado del estator sA está distribuido a lo largo del estator en un ángulo β, entonces la componente fundamental de la distribución de f.m.m. alrededor de la periferia $f_{sA}(\theta)$ será similar a la Ecuación 1-24. La diferencia radica principalmente en que cambia el término $(2/\pi)N_a i_a$ por $(2/\pi)N_{sA}k_{dA}i_a$, donde k_{dA} es el factor de devanado del devanado sA, y cuyo valor es igual al factor de distribución del devanado que corresponde al armónico fundamental, $k_{dA} = \sin(\beta/2)/(\beta/2)$[5].

Si las bobinas que están conectadas en serie no son de paso completo, entonces k_{dA} tiene que ser multiplicado por el factor de paso (k_{pA}), el cual corresponde al armónico fundamental, y en lugar de utilizar k_{dA}, se emplea el factor de devanado resultante $k_{wA} = k_{dA}k_{pA}$ en la expresión de f.m.m. De esta manera el vector espacial de la distribución de fuerza magnetomotriz que corresponde a la fase sA, es igual a la suma de vectores espaciales de la distribución de f.m.m. que corresponde a las bobinas individuales [39].

$$\vec{f}_{sA} = \vec{f}_{1a} + \vec{f}_{1b} + \cdots + \vec{f}_{1NsA} \ . \tag{1-28}$$

La Ecuación 1-28 puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\vec{f}_{sA} = j\frac{2}{\pi}N_{sA}k_{wA}i_{sA}e^{j\theta_a} = j\frac{2}{\pi}N_{sAeff}i_{sA}e^{-j\pi/2} = \frac{2}{\pi}N_{sAeff}i_{sA}e^{j0} \ , \tag{1-29}$$

donde N_{sAeff}, igual a $N_{sA}k_{wA}$, es el número efectivo de vueltas del devanado sA, N_{sA} es el número de vueltas, y k_{wA} es el factor de devanado de la fase sA. Si el ángulo θ_a es igual a $\pi/2$, entonces el eje magnético del devanado del estator sA se encuentra en una posición angular $\theta = 0$, y por lo tanto el eje magnético coincide con el eje real del marco de referencia estacionario. La Ecuación 1-29 se puede reescribir así:

$$\vec{f}_{sA} = \frac{2}{\pi}N_{sAeff}\vec{i}_{sA} \ , \tag{1-30}$$

[5] Siempre y cuando las bobinas sean de paso completo.

donde $\vec{i}_{sA}$ es el vector espacial de corriente que corresponde a la fase sA del estator,

$$\vec{i}_{sA} = i_{sA}(t)e^{j0} \ . \tag{1-31}$$

El vector espacial de la f.m.m. se encontró al utilizar superposición, este mismo principio se puede utilizar para obtener los vectores espaciales de la componente fundamental de la distribución de densidad de corriente, distribución de la densidad de flujo, etc., que corresponden a la fase sA. Así, el vector de la densidad de corriente se obtiene como:

$$\vec{J}_{sA} = \vec{J}_{1a} + \vec{J}_{1b} + \cdots + \vec{J}_{NsA} = -j\frac{2}{\pi}N_{sAeff}i_{sA}e^{j0} = -j\frac{2}{\pi}N_{sAeff}\vec{i}_{sA} \ , \tag{1-32}$$

donde $\vec{J}_{1a}, \vec{J}_{1b}, \ldots, \vec{J}_{NsA}$ representan las distribuciones de densidad de la corriente que corresponden a las bobinas $a, b, \ldots, N_{sA}$ respectivamente.
El vector espacial de densidad de flujo del estator de la fase sA se obtiene así:

$$\vec{b}_{sA} = \vec{b}_{1a} + \vec{b}_{1b} + \cdots + \vec{b}_{NsA} = \frac{2\mu_0}{\delta\pi}N_{sAeff}\vec{i}_{sA} \ . \tag{1-33}$$

La expresión del vector espacial del flujo concatenado de la fase sA del estator está dada por:

$$\vec{\psi}_{sA} = \vec{\psi}_{1a} + \vec{\psi}_{1b} + \cdots + \vec{\psi}_{1NsA} = N_{sAeff}^2\frac{2\mu_0 lD}{\delta\pi}\vec{i}_{sA} = L_{sA}\vec{i}_{sA} \ , \tag{1-34}$$

donde L_{sA} es la autoinductancia de la fase sA del estator [6], y ésta se puede expresar de la siguiente manera:

$$L_{sA} = N_{sAeff}^2\frac{2\mu_0 lD}{\delta\pi} = (N_{sA}k_{wA})^2\frac{2\mu_0 lD}{\delta\pi} \ . \tag{1-35}$$

El análisis anterior se realizó asumiendo una máquina de dos polos, sin embargo si la máquina tiene más de dos polos, entonces la expresión de la inductancia del estator tiene que ser dividida por P^2, donde P es el número de pares de polos.

1.3.3. Representación de ondas espaciales considerando un devanado trifásico en el estator

En este caso se considera una máquina trifásica con un sistema simétrico de devanados, cuya separación entre ellos es de $2\pi/3$ alrededor de la periferia del entrehierro. Para encontrar el vector espacial de cualquier cantidad, ya sea fuerzas magnetomotrices, corrientes, densidad de flujo, flujos concatenados, etc., simplemente se suman los vectores espaciales de cada fase individual [39]. Es así como se obtiene la ecuación de la fuerza magnetomotriz en un devanado trifásico:

$$\vec{f}_s'' = \vec{f}_{sA} + \vec{f}_{sB} + \vec{f}_{sC} \ , \tag{1-36}$$

[6] Siempre y cuando la inductancia de dispersión de esta misma fase sea despreciada.

donde el número de vueltas y el factor de devanado es el mismo para cada devanado, es decir, $N_s = N_{sA} = N_{sB} = N_{sC}$ y $k_{ws} = k_{wA} = k_{wB} = k_{wC}$.
Los vectores espaciales que representan las fuerzas magnetomotrices de las fases están dados por:

$$\begin{aligned}\vec{f}_{sA} &= \frac{2}{\pi} N_s k_{ws} i_{sA} = \frac{2}{\pi} N_s k_{ws} i_{sA}(t) e^{j0} \\ \vec{f}_{sB} &= \frac{2}{\pi} N_s k_{ws} i_{sB} = \frac{2}{\pi} N_s k_{ws} i_{sB}(t) e^{j2\pi/3} \\ \vec{f}_{sC} &= \frac{2}{\pi} N_s k_{ws} i_{sC} = \frac{2}{\pi} N_s k_{ws} i_{sC}(t) e^{j4\pi/3} \ . \end{aligned} \tag{1-37}$$

Al reemplazar la Ecuación 1-37 en la Ecuación 1-36 se llega a la siguiente expresión:

$$\vec{f}_s'' = \frac{2}{\pi} N_s k_{ws} \left[1 i_{sA}(t) + a i_{sB}(t) + a^2 i_{sC}(t)\right] = \frac{2}{\pi} N_s k_{ws} \vec{i}_s'' \ , \tag{1-38}$$

donde $1, a, a^2$ son los vectores unitarios en la dirección de los ejes magnéticos de las fases sA, sB y sC respectivamente. Esto se debe a que $1 = e^{j0}, a = e^{j2\pi/3}$ y $a^2 = e^{j4\pi/3}$.
Dichos vectores unitarios son vectores espaciales y no deben ser confundidos con operadores temporales. En la Ecuación 1-38 la corriente $\vec{i}_s''$ es el vector espacial de la corriente en el estator expresado en el marco de referencia estacionario[7]:

$$\vec{i}_s'' = 1 i_{sA}(t) + a i_{sB}(t) + a^2 i_{sC}(t) = c\vec{i}_s \ , \tag{1-39}$$

donde:

$$\vec{i}_s = \frac{1}{c} \left[1 i_{sA}(t) + a i_{sB}(t) + a^2 i_{sC}(t)\right] \ , \tag{1-40}$$

y c es una constante, cuyo valor es $c = 3/2$ cuando se quiere expresar la forma asimétrica del vector espacial trifásico de la corriente en el estator, y es $c = \sqrt{3/2}$ cuando se quiere obtener la forma simétrica del vector espacial trifásico de la corriente del estator.
De esta forma se define la ecuación que describe el vector espacial de cualquier cantidad encontrada en la máquina así:

$$\begin{aligned}\vec{x}_s &= \frac{1}{c} \left[x_{sA}(t) + a x_{sB}(t) + a^2 x_{sC}(t)\right] \\ \vec{x}_r &= \frac{1}{c} \left[x_{rA}(t) + a x_{rB}(t) + a^2 x_{rC}(t)\right] \ , \end{aligned} \tag{1-41}$$

donde $x_{sA}(t), x_{sB}(t), x_{sC}(t), x_{rA}(t), x_{rB}(t)$ y $x_{rC}(t)$ son los valores instantáneos de fase tanto del rotor como del estator.
La componente instantánea de secuencia cero para cualquier cantidad está definida como:

$$\begin{aligned}x_{s0}(t) &= c_2 \left[x_{sA}(t) + x_{sB}(t) + x_{sC}(t)\right] \\ x_{r0}(t) &= c_2 \left[x_{rA}(t) + x_{rB}(t) + x_{rC}(t)\right] \ , \end{aligned} \tag{1-42}$$

[7] El marco de referencia está fijado al estator de la máquina.

donde c_2 es igual a $1/3$ cuando se está definiendo el vector espacial simétrico, o también toma el valor de $1/\sqrt{3}$ cuando se desea definir el vector espacial asimétrico. El vector espacial trifásico no contiene la componente instantánea de secuencia cero. Este hecho se demuestra a continuación.
Sí se descompone una función instantánea en la suma de la componente de secuencia cero más las componentes restantes entonces se tiene:

$$\begin{aligned} x_{sA}(t) &= x_{sA}(t)' + x_{s0}(t) \\ x_{sB}(t) &= x_{sB}(t)' + x_{s0}(t) \\ x_{sC}(t) &= x_{sC}(t)' + x_{s0}(t) \ , \end{aligned} \tag{1-43}$$

sustituyendo la Ecuación 1-43 en la Ecuación 1-41, el vector espacial de la función analizada en el estator se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{x}_s = \frac{2}{3}\left[x'_{sA}(t) + a x'_{sB}(t) + a^2 x_{sC}(t) + x_{s0}(1 + a + a^2)\right] = \vec{x}'_s \ , \tag{1-44}$$

donde $\vec{x}'_s$ es un vector espacial que no contiene la componente de secuencia cero, de donde se deduce que:

$$\vec{x}'_s = \frac{2}{3}\left[x'_{sA}(t) + a x'_{sB}(t) + a^2 x_{sC}(t)\right] \ . \tag{1-45}$$

El hecho de que la distribución espacial de las variables x_s y x_r hayan sido asumidas como distribuciones sinusoidales, y el hecho de que las funciones instantáneas de secuencia cero tengan las mismas magnitudes y desfases, implica que las corrientes se anulan físicamente, tal y como se expresó en la Ecuación 1-44.

Relación entre los valores instantáneos y los vectores espaciales

Como se demostró anteriormente un vector espacial trifásico no contiene componente de secuencia cero. En general si el valor instantáneo de la componente de secuencia cero no es cero, entonces el valor instantáneo de las componentes trifásicas de x_s o x_r se pueden encontrar de la siguiente manera[8]:

$$\begin{aligned} x_{sA}(t) &= \Re(\vec{x})_s + x_{s0}(t) \\ x_{sB}(t) &= \Re(a\vec{x})_s + x_{s0}(t) \\ x_{sC}(t) &= \Re(a^2\vec{x})_s + x_{s0}(t) \ , \end{aligned} \tag{1-46}$$

donde $x_{s0} = 1/3(x_{sA} + x_{sB} + x_{sC})$.
Es así como cualquier variable de la máquina de corriente alterna puede ser expresada con notación de vectores espaciales [39].
Esta notación se utilizará en el desarrollo de la tesis como punto de partida para entender el desarrollo matemático del modelo de la máquina de inducción.

[8] Se utiliza la parte real del vector espacial porque las variables instantáneas se definieron como cosenos, en caso de ser definidas como funciones sinusoidales, entonces se usan las componentes imaginarias [21,39,40].

1.4. Representación de la máquina de inducción en el marco de referencia QD0

En esta sección se expresan las ecuaciones para describir el modelo de la máquina de inducción utilizando el marco de referencia estacionario por medio de la transformada de Park. Se utiliza este marco de referencia ya que es posible representar las variables qd de la máquina, en el mismo marco de referencia que las variables de la red de alimentación[9] [41–44].

Con el fin de realizar la representación de la máquina de inducción se asume entonces que la máquina es trifásica con un entrehierro simétrico. Las ecuaciones en el marco de referencia estacionario se dan entonces cuando $\omega = 0$, donde ω es la velocidad del marco de referencia que gira en el mismo sentido de rotación al del rotor. La relación entre las cantidades de fase abc y las cantidades $qd0$ del marco de referencia estacionario, se puede observar en la Figura **1-9**.

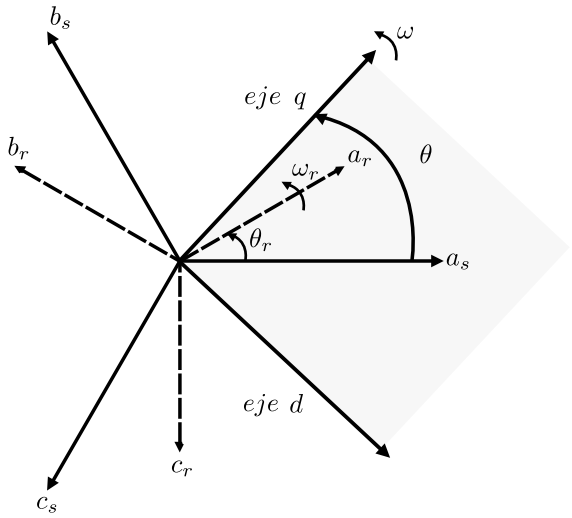


Figura 1-9.: Marco de referencia qd. Fuente [42].

La ecuación que transforma las cantidades abc en cantidades $qd0$ está dada por:

$$\begin{bmatrix} f_q \\ f_d \\ f_0 \end{bmatrix} = [T_{qd0}(\theta)] \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} , \tag{1-47}$$

en donde las variables f pueden ser tensiones de fase, corrientes y flujos concatenados de la máquina. El ángulo de transformación $\theta(t)$ se expresa en radianes eléctricos. Este ángulo corresponde a la separación entre el $eje - q$ que es estacionario y al $eje - a$ que también es estacionario y el cual corresponde precisamente al eje magnético de la fase a del estator.

[9] Esto se debe a que se considera una red grande y compleja.

Su ecuación puede ser expresada como la integral entre cero y t de la función de velocidad angular en función del tiempo, así:

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t)dt + \theta(0) \ . \tag{1-48}$$

De forma similar se puede expresar el ángulo entre los ejes magnéticos del rotor y el estator como:

$$\theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(t)dt + \theta_r(0) \ , \tag{1-49}$$

donde ω_r es la velocidad de rotación del rotor, y $\theta(0)$ y $\theta_r(0)$ son los valores iniciales de los ángulos.
La matriz de transformación de Park es:

$$[T_{qd0}\,(\theta)] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\theta & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \ , \tag{1-50}$$

y su matriz inversa es igual a:

$$[T_{qd0}\,(\theta)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \ . \tag{1-51}$$

Estas matrices se utilizan entonces para realizar la transformación de las ecuaciones de tensión que están en términos de las cantidades de fase de los devanados del estator. Utilizando notación matricial se puede definir la tensión como:

$$\mathbf{v}_s^{abc} = p\lambda_s^{abc} + \mathbf{r}_s^{abc}\mathbf{i}_s^{abc} \ . \tag{1-52}$$

Aplicando entonces la Ecuación 1-50 en la Ecuación 1-52 se obtiene la expresión de la tensión en el marco de referencia estacionario descrita por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v}_s^{qd0} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_s^{qd0} + p\lambda_s^{qd0} + \mathbf{r}_s^{qd0}\mathbf{i}_s^{qd0} \ , \tag{1-53}$$

donde:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{1-54}$$

$$\mathbf{r}_s^{qd0} = r_s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{1-55}$$

Las variables del rotor también son transformadas en el marco de referencia qd. De la Figura **1-9** se puede determinar que el ángulo de transformación para las cantidades de fase del rotor es $\theta - \theta_r$. Este ángulo se utiliza en la matriz de transformación $\mathbf{T}_{qd0}(\theta - \theta_r)$ y de forma análoga a la ecuación de tensión en el estator se obtiene la siguiente ecuación de tensión para el rotor:

$$\mathbf{v}_r^{qd0} = (\omega - \omega_r) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_r^{qd0} + p\lambda_r^{qd0} + \mathbf{r}_r^{qd0}\mathbf{i}_r^{qd0} . \tag{1-56}$$

Ahora es necesario expresar los flujos concatenados del estator y del rotor en el mismo marco de referencia. Para ello se utilizan las inductancias del sistema y las corrientes $qd0$, así:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{qs} \\ \lambda_{ds} \\ \lambda_{0s} \\ \lambda'_{qr} \\ \lambda'_{dr} \\ \lambda'_{0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ls}+L_m & 0 & 0 & L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls}+L_m & 0 & 0 & L_m & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} & 0 & 0 & 0 \\ L_m & 0 & 0 & L'_{lr}+L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_m & 0 & 0 & L'_{lr}+L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i_{0s} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \\ i'_{0r} \end{bmatrix} , \tag{1-57}$$

donde las cantidades con apóstrofe significan que están referidas al estator, es decir:

$$\begin{aligned} \lambda'_{qr} &= \frac{N_s}{N_r}\lambda_{qr} \\ \lambda'_{dr} &= \frac{N_s}{N_r}\lambda_{dr} \\ i'_{qr} &= \frac{N_s}{N_r} i_{qr} \\ i'_{dr} &= \frac{N_s}{N_r} i_{dr} \\ L'_{lr} &= \left(\frac{N_s}{N_r}\right)^2 L_{lr} . \end{aligned} \tag{1-58}$$

La inductancia de magnetización es igual a:

$$L_m = \frac{3}{2}L_{ss} = \frac{3N_s}{2N_r}L_{sr} = \frac{3N_s}{2N_r}L_{rr} . \tag{1-59}$$

Con este modelo es posible simular máquinas con potencias y parámetros diferentes, lo que permite obtener las corrientes dinámicas que fluyen por ellas, no solo en estado estable sino también en el arranque de la máquina y en diferentes tipos de transitorios que se puedan

presentar por variaciones en los flujos del entrehierro. Para el caso de esta tesis se simularán 5 máquinas con el modelo QD0 en diferentes tipos de fallas. Dichas simulaciones servirán como parámetro de comparación de las formas de onda obtenidas con métodos que se explicarán en el Capítulo 2.

2. Modelado de la corriente de cortocircuito utilizando vectores espaciales

Este capítulo está dedicado a explorar la formulación de la corriente de cortocircuito por medio de la notación de vectores espaciales. Para ello es necesario obtener unas expresiones de los flujos del rotor y del estator las cuales pueden ser encontradas a partir la solución de las ecuaciones dinámicas de la máquina de inducción. Con base en esta formulación se analizan dos enfoques diferentes para la corriente de cortocircuito, la primera es una ecuación formulada en [21], y que se toma como el caso base de esta investigación, y la segunda es una ecuación propuesta como parte de los aportes de esta tesis de maestría [24]. La diferencia entre ambas ecuaciones radica principalmente en la formulación de la componente de estado estable, y por medio de simulaciones se validarán las diferencias entre ambos enfoques.

2.1. Deducción de las ecuaciones de cortocircuito utilizando la notación de vectores espaciales

Las ecuaciones dinámicas de la máquina de inducción son expresadas en el marco de referencia estacionario utilizando la notación de vectores espaciales; para ello se definen las tensiones del rotor y del estator de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{v}_s &= R_s\vec{i}_s + \frac{d\vec{\lambda}_s}{dt} \\ \vec{v}_r &= R_r\vec{i}_r + \frac{d\vec{\lambda}_r}{dt} - j\omega_r\vec{\lambda}_r \ ,\end{aligned} \tag{2-1}$$

donde:
R_s, R_r son las resistencias del estator y del rotor,
$\vec{i_s}, \vec{i_r}$ son las corrientes de estator y de rotor,
$\vec{v_s}, \vec{v_r}$ son las tensiones de estator y de rotor,
$\vec{\lambda}_s, \vec{\lambda}_r$ son los flujos concatenados de estator y de rotor,
ω_r es la velocidad del rotor.

Al escribir los flujos concatenados que se generan en la máquina en términos de las corrientes se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_s &= L_s\vec{i}_s + L_m\vec{i}_r = (L_{ls} + L_m)\vec{i}_s + L_m\vec{i}_r \\ \vec{\lambda}_r &= L_m\vec{i}_s + L_r\vec{i}_r = L_m\vec{i}_s + (L_{lr} + L_m)\vec{i}_r \ .\end{aligned} \tag{2-2}$$

Reorganizando la Ecuación 2-2 es posible obtener dos expresiones de corrientes; una en el estator y otra en el rotor, así:

$$\begin{aligned}\vec{i}_s &= \frac{\vec{\lambda}_s}{L'_s} - \frac{L_m}{L_r}\frac{\vec{\lambda}_r}{L'_s} \\ \vec{i}_r &= \frac{\vec{\lambda}_r}{L'_r} - \frac{L_m}{L_s}\frac{\vec{\lambda}_s}{L'_r} \ ,\end{aligned} \tag{2-3}$$

donde L'_s, L'_r, L_{ls} and L_{lr} son las inductancias transitorias y las inductancias de dispersión de estator y de rotor respectivamente. Estas inductancias transitorias se obtienen a partir de las inductancias de dispersión y de las inductancias mutuas que se generan entre el rotor y el estator:

$$\begin{aligned}L'_s &= L_{ls} + \frac{L_m L_{lr}}{L_{lr} + L_m} \\ L'_r &= L_{lr} + \frac{L_m L_{ls}}{L_{ls} + L_m} \ .\end{aligned} \tag{2-4}$$

Utilizando las definiciones anteriores la Ecuación 2-1, se puede escribir como una ecuación de estados; donde los flujos concatenados son las variables de estado, y las tensiones de rotor y estator son las señales de entrada. La matriz de estados depende de las resistencias e inductancias de la máquina junto con la velocidad angular del rotor, lo que la convierte en una matriz compleja.
Es entonces como se define la forma general de la ecuación dinámica de la máquina de inducción, así:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\vec{\lambda}_s \\ \vec{\lambda}_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L'_s} & \frac{R_s}{L'_s}\frac{L_m}{L_r} \\ \frac{R_r}{L'_r}\frac{L_m}{L_s} & -\frac{R_r}{L'_r} + j\omega_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\lambda}_s \\ \vec{\lambda}_r\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\vec{v}_s \\ \vec{v}_r\end{bmatrix} \ , \tag{2-5}$$

siendo $L_s = L_{ls} + L_m$ y $L_r = L_{lr} + L_m$ las sumas de las inductancias de dispersión y de magnetización del estator y del rotor respectivamente.

2.1.1. Solución de la ecuación de estados

Al resolver la ecuación de estados, Ecuación 2-5, se obtienen unas expresiones de los flujos de la máquina que se pueden utilizar para encontrar la forma cerrada de la ecuación de

cortocircuito en el estator, y además encontrar un nuevo modelo circuital en componentes simétricas a partir de las funciones de tensión que dependen directamente de los flujos.
Es por esto que se debe obtener una solución analítica de la ecuación, para lo cual es necesario realizar las siguientes suposiciones:

- Se asume que durante un cortocircuito en el estator de la máquina, la velocidad del rotor permanece constante e igual a su velocidad de prefalla; esto se debe a la característica de inercia que posee la máquina. Como consecuencia de esta suposición se logra que la Ecuación 2-1 se convierta en un sistema de ecuaciones lineales y por lo tanto encontrar su solución se vuelve más manejable. Para corroborar esta suposición se simularan diferentes tipos de fallas durante 300 ms.

- La tensión en los terminales del estator se conoce y es fija. Esta suposición es válida si la máquina se conecta a un sistema rígido, donde la cantidad de corriente que fluye por la máquina no tiene un efecto significativo sobre la tensión de los terminales. De esta forma se puede asumir que la magnitud de la tensión y el ángulo tienen valores nominales.
  Por ejemplo, si una falla monofásica ocurre en los terminales de la máquina, la tensión de dicha fase es cero, pero la magnitud y el ángulo de la tensión en las otras fases permanecen constantes.

Utilizando las suposiciones anteriores y para efectos de simplificar la notación, se procede entonces a reescribir la Ecuación 2-5 de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} \ . \tag{2-6}$$

La solución de la Ecuación 2-6 está compuesta entonces por una respuesta forzada y una respuesta natural, la cual se obtiene cuando $\mathbf{u} = 0$. El hecho de que la tensión sea igual a cero, significa que no existe señal de excitación por parte de la red de alimentación, es entonces como la ecuación va a depender simplemente de los parámetros de la máquina y de los flujos.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\left(\mathbf{t} - \mathbf{t_0}\right) = \ln\left(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\right) \ . \tag{2-7}$$

La respuesta natural del sistema se va a definir entonces como una función exponencial dependiente del tiempo cuyo exponente es una matriz constante compleja, así:

$$\mathbf{x_h}(\mathbf{t}) = \mathbf{x_0}\mathbf{e}^{\mathbf{A(t-t_0)}} \ , \tag{2-8}$$

donde $\mathbf{x_h}$ es el vector que conforma la respuesta natural de los flujos $\vec{\lambda}_s$ y $\vec{\lambda}_r$, y $\mathbf{x_0}$ corresponde al vector conformado por los valores iniciales de dichos flujos.

$$\mathbf{x_h} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_{sh} \\ \vec{\lambda}_{rh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_s\left(t_0\right) \\ \vec{\lambda}_r\left(t_0\right) \end{bmatrix} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \ . \tag{2-9}$$

Para encontrar la expresión correspondiente a la Ecuación 2-9 es necesario encontrar los valores propios y los vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$ [45, 46]. Esta matriz es una matriz cuadrada de orden dos ($n = 2$) con valores complejos.
Existen entonces dos valores propios ψ_1 y ψ_2 que corresponden a la matriz $\mathbf{A}$ los cuales satisfacen la siguiente ecuación:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{\Psi P} \ . \tag{2-10}$$

La matriz $\mathbf{P}$ contiene los vectores propios asociados con el conjunto de valores propios $\mathbf{\Psi}$, a esto se le llama espectro de la matriz $\mathbf{A}$.
Los números ψ_1 y ψ_2 son números escalares que satisfacen la ecuación característica:

$$\det\left(\mathbf{\Psi I} - \mathbf{A}\right) = 0 \ , \tag{2-11}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, y $\mathbf{\Psi}$ es la matriz de valores propios. La Ecuación 2-11 también puede ser escrita como:

$$\det\begin{bmatrix} \psi - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & \psi - a_4 \end{bmatrix} = 0 \ , \tag{2-12}$$

donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{R_s}{L'_s} \\ a_2 &= \frac{R_s}{L'_s}\frac{L_m}{L_r} \\ a_3 &= \frac{R_r}{L'_r}\frac{L_m}{L_s} \end{aligned} \tag{2-13}$$

$$a_4 = -\frac{R_r}{L'_r} + j\omega_r \ . \tag{2-14}$$

Como se mencionó anteriormente, la velocidad del rotor es constante durante los primeros instantes del cortocircuito, por lo tanto la matriz $\mathbf{A}$ se vuelve constante compleja. Al resolver la Ecuación 2-11 se obtiene la siguiente expresión polinomial:

$$\det\begin{pmatrix} \psi - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & \psi - a_4 \end{pmatrix} = \psi^2 - \psi(a_1 + a_4) + (a_1 a_4 - a_2 a_3) \ . \tag{2-15}$$

Resolviendo el polinomio de la Ecuación 2-15 se obtienen las siguientes raíces:

$$\psi_{1,2} = \frac{a_1 + a_4 \pm \sqrt{a_1^2 + a_4^2 - 2a_1 a_4 + 4a_2 a_3}}{2} \ . \tag{2-16}$$

La parte real de los valores propios indica la tasa de decaimiento de las señales de flujos, mientras que la parte imaginaria corresponde a la frecuencia de oscilación. El vector propio

uno es aquel que hace referencia a la componente de baja frecuencia, mientras que el vector propio dos es aquel que hace referencia al comportamiento del sistema bajo la frecuencia sincrónica [21].
Es posible entonces definir la matriz de valores propios de la siguiente manera:

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} . \tag{2-17}$$

Estos valores propios permiten calcular los vectores propios del sistema al obtener la solución no trivial del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \psi_{1,2} - a_1 & -a_2 \\ -a_3 & \psi_{1,2} - a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-18}$$

$$(\psi_{1,2} - a_1)p_1 - a_2 p_2 = 0 \tag{2-19}$$

$$-a_3 p_1 + (\psi_{1,2} - a_4)p_2 = 0 . \tag{2-20}$$

Despejando p_1 en la Ecuación 2-20 es posible definir una matriz de vectores propios $\mathbf{P}$ así:

$$p_1 = \frac{p_2(\psi_{1,2} - a_4)}{a_3} \tag{2-21}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\psi_1 - a_4}{a_3} & \frac{\psi_2 - a_4}{a_3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{2-22}$$

La matriz $\mathbf{P}$ no es singular y tiene dos vectores propios linealmente independientes, lo cual permite obtener su matriz inversa y por lo tanto definir la forma de Jordan de la matriz $\mathbf{A}$, que corresponde a la misma matriz de valores propios $\mathbf{\Psi}$.

$$\mathbf{J} = \mathbf{P^{-1}AP} = \mathbf{\Psi} . \tag{2-23}$$

El propósito de encontrar el espacio propio de $\mathbf{A}$ es obtener la matriz exponencial dada en la Ecuación 2-9. Esta matriz exponencial se puede encontrar a partir del siguiente cálculo:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Psi}t}\mathbf{P^{-1}} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\psi_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\psi_1 t} \end{bmatrix}\mathbf{P^{-1}} \tag{2-24}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \frac{p_1 e^{\psi_1 t} - p_2 e^{\psi_2 t}}{p_1 - p_2} & \frac{-p_1 p_2 \left(e^{\psi_1 t} - e^{\psi_2 t}\right)}{p_1 - p_2} \\ \frac{e^{\psi_1 t} - e^{\psi_2 t}}{p_1 - p_2} & \frac{-\left(p_2 e^{\psi_1 t} - p_1 e^{\psi_2 t}\right)}{p_1 - p_2} \end{bmatrix} . \tag{2-25}$$

Al reemplazar la Ecuación 2-25 en la Ecuación 2-9 se obtiene entonces la siguiente expresión de la solución homogénea en términos de los parámetros de la máquina así:

$$\begin{bmatrix} \vec{\lambda}_{sh} \\ \vec{\lambda}_{rh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_s\left(t_0\right) \\ \vec{\lambda}_r\left(t_0\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{p_1 e^{\psi_1 t} - p_2 e^{\psi_2 t}}{p_1 - p_2} & d\dfrac{-p_1 p_2\left(e^{\psi_1 t} - e^{\psi_2 t}\right)}{p_1 - p_2} \\ \dfrac{e^{\psi_1 t} - e^{\psi_2 t}}{p_1 - p_2} & \dfrac{-\left(p_2 e^{\psi_1 t} - p_1 e^{\psi_2 t}\right)}{p_1 - p_2} \end{bmatrix} . \tag{2-26}$$

Ahora bien, para encontrar la solución total de la Ecuación 2-5 es necesario encontrar la respuesta forzada. Para tal fin se utiliza entonces el método de los coeficientes indeterminados teniendo en cuenta el vector de tensiones.
Esta metodología consiste en predecir las expresiones que tienen las funciones de la solución particular basado en las expresiones de las señales de entrada. En este caso las tensiones del estator y del rotor son funciones sinusoidales que están expresadas en forma de vectores espaciales. El vector de tensión del estator está compuesto por la suma de sus componentes de secuencia positiva y negativa, mientras el vector espacial de tensión en el rotor es igual a cero, esto se debe a que en una máquina de inducción el rotor se encuentra en cortocircuito. Para encontrar el vector espacial de la tensión en el estator se procede entonces a definir las componentes instantáneas por fase de la tensión en los terminales de la máquina, así:

$$\begin{aligned} v_a &= V_A \sin(\omega_s t + \phi_A) \\ v_b &= V_B \sin(\omega_s t + \phi_B) \\ v_c &= V_C \sin(\omega_s t + \phi_C) \ , \end{aligned} \tag{2-27}$$

donde ϕ_A, ϕ_B, ϕ_C, son los ángulos de desfase de las ondas de tensión.
Utilizando identidades trigonométricas se puede reescribir la Ecuación 2-27 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{V_A}{2}\left[e^{j(\omega_s t+\phi_A)} - e^{-j(\omega_s t+\phi_A)}\right] \\ v_b &= \frac{V_B}{2}\left[e^{j(\omega_s t+\phi_B)} - e^{-j(\omega_s t+\phi_B)}\right] \\ v_c &= \frac{V_C}{2}\left[e^{j(\omega_s t+\phi_C)} - e^{-j(\omega_s t+\phi_C)}\right] \ . \end{aligned} \tag{2-28}$$

El conjunto de ángulos de las fases, ϕ_A, ϕ_B, ϕ_C, pueden formar sistemas de tensiones simétricos o asimétricos, por lo tanto se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_A &= 0 + \alpha_a \\ \phi_B &= -2\pi/3 + \alpha_b \\ \phi_C &= 2\pi/3 + \alpha_c \ , \end{aligned} \tag{2-29}$$

donde $\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c$ pueden tener valor no nulos y como regla general los tres ángulos pueden tener valores diferentes.

Para determinar el vector espacial de tensión en el estator se procede a reemplazar la Ecuación 2-28 en la Ecuación 1-41, dando como resultado la siguiente expresión:

$$\vec{v}_s = \frac{1}{2c}[V_A e^{j\omega_s t} e^{j\phi_A} - V_A e^{-j\omega_s t} e^{-j\phi_A} + aV_B e^{j\omega_s t} e^{j\phi_B} - aV_B e^{-j\omega_s t} e^{-j\phi_B} + a^2 V_C e^{j\omega_s t} e^{j\phi_C} - a^2 V_C e^{-j\omega_s t} e^{-j\phi}] \,. \tag{2-30}$$

Agrupando los términos en la Ecuación 2-30 se obtiene un vector espacial de la tensión en el estator compuesto por una componente de secuencia positiva y una componente de secuencia negativa, así:

$$\vec{v}_s = \frac{1}{2c}\left[\underbrace{e^{j\omega_s t}\left(V_A e^{j\phi_A} + aV_B e^{j\phi_B} + a^2 V_C e^{j\phi_C}\right)}_{Secuencia\ Positiva} - \underbrace{e^{-j\omega_s t}\left(V_A e^{-j\phi_A} + aV_B e^{-j\phi_B} + a^2 V_C e^{-j\phi_C}\right)}_{Secuencia\ Negativa}\right] \,. \tag{2-31}$$

Así se pueden definir las expresiones de tensión de secuencia positiva y secuencia negativa como vectores espaciales.

$$\vec{V}_1 = \frac{\left(V_A e^{j\phi_A} + aV_B e^{j\phi_B} + a^2 V_C e^{j\phi_C}\right)}{2c} \tag{2-32}$$

$$\vec{V}_2 = \frac{\left(V_A e^{-j\phi_A} + aV_B e^{-j\phi_B} + a^2 V_C e^{-j\phi_C}\right)}{2c} \,. \tag{2-33}$$

Como se mencionó anteriormente en la Subsección 1.3.3 la variable c puede tomar el valor de $\sqrt{3/2}$ cuando la Ecuación 2-27 forma un sistema de tensiones simétrico, o $3/2$ cuando ésta forma un sistema de tensiones asimétrico.
Es así como se define el siguiente vector de tensiones compuesto por los vectores espaciales de tensión del estator y del rotor respectivamente:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \vec{v}_s \\ \vec{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 e^{j\omega_s t} + \vec{V}_2 e^{-j\omega_s t} \\ 0 \end{bmatrix} \,. \tag{2-34}$$

Para obtener la solución particular de la Ecuación 2-5, los flujos concatenados del rotor y del estator deben ser escritos de la misma manera que las señales de entrada, lo que significa que existe una suma de las funciones de secuencia positiva y de secuencia negativa para los flujos de la máquina, así:

$$\mathbf{x_p} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_{sp} \\ \vec{\lambda}_{rp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\Lambda}_{s1} e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{s2} e^{-j\omega_s t} \\ \vec{\Lambda}_{r1} e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{r2} e^{-j\omega_s t} \end{bmatrix} \,. \tag{2-35}$$

Teniendo como base la Ecuación 2-35 se puede calcular la derivada respecto al tiempo de los flujos como se muestra a continuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \vec{\lambda}_{sp} \\ \vec{\lambda}_{rp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega_s \vec{\Lambda}_{s1} e^{j\omega_s t} - j\omega_s \vec{\Lambda}_{s2} e^{-j\omega_s t} \\ j\omega_s \vec{\Lambda}_{r1} e^{j\omega_s t} - j\omega_s \vec{\Lambda}_{r2} e^{-j\omega_s t} \end{bmatrix} \,. \tag{2-36}$$

La ecuación de estados, Ecuación 2-5, puede ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{u} = 0 \ . \tag{2-37}$$

Reemplazando la Ecuación 2-34, la Ecuación 2-35 y laEcuación 2-36 en la Ecuación 2-37 se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega_s\vec{\Lambda}_{s1}e^{j\omega_s t} - j\omega_s\vec{\Lambda}_{s2}e^{-j\omega_s t} \\ j\omega_s\vec{\Lambda}_{r1}e^{j\omega_s t} - j\omega_s\vec{\Lambda}_{r2}e^{-j\omega_s t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Lambda}_{s1}e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{s2}e^{-j\omega_s t} \\ \vec{\Lambda}_{r1}e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{r2}e^{-j\omega_s t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{V}_1 e^{j\omega_s t} + \vec{V}_2 e^{-j\omega_s t} \\ 0 \end{bmatrix} \ . \tag{2-38}$$

Se debe tener en cuenta que flujos de secuenica positiva producen tensiones de secuencia positiva, analogamente flujos de secuencia negativa producen tensiones de secuencia negativa, por lo tanto al realizar las operaciones de la Ecuación 2-38 se puede definir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= (j\omega_s - a_1)\vec{\Lambda}_{s1} - a_2\vec{\Lambda}_{r1} \\ \vec{V}_2 &= (-j\omega_s - a_1)\vec{\Lambda}_{s2} - a_2\vec{\Lambda}_{r2} \\ 0 &= (j\omega_s - a_4)\vec{\Lambda}_{r1} - a_3\vec{\Lambda}_{s1} \\ 0 &= (-j\omega_s - a_4)\vec{\Lambda}_{r2} - a_3\vec{\Lambda}_{s2} \ . \end{aligned} \tag{2-39}$$

Ahora es necesario encontrar los coeficientes de la Ecuación 2-35, los cuales se pueden obtener a partir de la Ecuación 2-39 reorganizando el sistema de ecuaciones donde las tensiones, los valores propios y la velocidad son conocidas:

$$\begin{bmatrix} \vec{\Lambda}_{s1} \\ \vec{\Lambda}_{s2} \\ \vec{\Lambda}_{r1} \\ \vec{\Lambda}_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega_s - a_1 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & -j\omega_s - a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & j\omega_s - a_4 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & -j\omega_s - a_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ . \tag{2-40}$$

Finalmente es necesario encontrar las condiciones iniciales de los flujos del rotor y del estator $\vec{\lambda}_{si}$ y $\vec{\lambda}_{ri}$. Para ello se define $t = t_0$ y de esta forma la función exponencial, $e^{\mathbf{A}t-t0}$, se convierte en una matriz identidad $\mathbf{I}$. Posteriormente se despejan las variables como se ilustra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \vec{\lambda}_s(t) \\ \vec{\lambda}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_{si} \\ \vec{\lambda}_{ri} \end{bmatrix} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} + \begin{bmatrix} \vec{\Lambda}_{s1}e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{s2}e^{-j\omega_s t} \\ \vec{\Lambda}_{r1}e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{r2}e^{-j\omega_s t} \end{bmatrix} \tag{2-41}$$

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_{si} &= \vec{\lambda}_s(t_0) - \vec{\Lambda}_{s1}e^{j\omega_s t_0} - \vec{\Lambda}_{s2}e^{-j\omega_s t_0} \\ \vec{\lambda}_{ri} &= \vec{\lambda}_r(t_0) - \vec{\Lambda}_{r1}e^{j\omega_s t_0} - \vec{\Lambda}_{r2}e^{-j\omega_s t_0} \end{aligned} \ . \tag{2-42}$$

La solución de la Ecuación 2-5 es entonces la suma de la respuesta natural y de la respuesta forzada encontradas anteriormente. Dicha solución es escrita en términos de los valores propios, vectores propios, funciones exponenciales y de las componentes de los flujos de estado estable de secuencia positiva y de secuencia negativa, así:

$$\vec{\lambda}_s = \frac{p_1\left(\vec{\lambda}_{si} - p_2\vec{\lambda}_{ri}\right)}{p_1 - p_2}e^{\psi_1(t-t_0)} + \frac{p_2\left(p_1\vec{\lambda}_{ri} - \vec{\lambda}_{si}\right)}{p_1 - p_2}e^{\psi_2(t-t_0)} + \vec{\Lambda}_{1s}e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{2s}e^{-j\omega_s t}$$
$$\vec{\lambda}_r = \frac{\left(\vec{\lambda}_{si} - p_2\vec{\lambda}_{ri}\right)}{p_1 - p_2}e^{\psi_1(t-t_0)} + \frac{\left(p_1\vec{\lambda}_{ri} - \vec{\lambda}_{si}\right)}{p_1 - p_2}e^{\psi_2(t-t_0)} + \vec{\Lambda}_{1r}e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{2r}e^{-j\omega_s t}\ . \tag{2-43}$$

Gracias al análisis anterior se puede obtener una expresión de la corriente de cortocircuito en los terminales de la máquina en forma de vector espacial. Esto es posible ya que los flujos pueden ser reemplazados en la siguiente ecuación de corriente:

$$\vec{i}_s = \frac{\vec{\lambda}_s}{L'_s} - \frac{L_m}{L_r}\frac{\vec{\lambda}_r}{L'_s}\ . \tag{2-44}$$

Reemplazando la Ecuación 2-43 en la Ecuación 2-44 la expresión resultante es:

$$\vec{i}_s = \vec{I}_{dc}e^{\psi_1(t-t_0)} + \vec{I}_t e^{\psi_2(t-t_0)} + \vec{I}_{ss1}e^{j\omega_s t} + \vec{I}_{ss2}e^{-j\omega_s t}\ , \tag{2-45}$$

donde:

$$\vec{I}_{dc} = \frac{\left(\vec{\lambda}_{si} - p_2\vec{\lambda}_{ri}\right)\left(p_1 - \frac{L_m}{L_r}\right)}{L'_s\left(p_1 - p_2\right)} \tag{2-46}$$

$$\vec{I}_t = \frac{\left(p_1\vec{\lambda}_{ri} - \vec{\lambda}_{si}\right)\left(p_2 - \frac{L_m}{L_r}\right)}{L'_s\left(p_1 - p_2\right)} \tag{2-47}$$

$$\vec{I}_{ss1}e^{j\omega_s t} = \frac{\vec{\Lambda}_{1s}}{L'_s}e^{j\omega_s t} - \frac{L_m\vec{\Lambda}_{1r}}{L_r L'_s}e^{j\omega_s t}$$
$$\vec{I}_{ss2}e^{-j\omega_s t} = \frac{\vec{\Lambda}_{2s}}{L'_s}e^{-j\omega_s t} - \frac{L_m\vec{\Lambda}_{2r}}{L'_s L_r}e^{-j\omega_s t}\ . \tag{2-48}$$

Factorizando las componentes exponenciales en la Ecuación 2-48 se obtienen las siguientes expresiones para la corriente de estado estable tanto de secuencia positiva como de secuencia negativa, así:

$$\vec{I}_{ss1}e^{j\omega_s t} = \left(\frac{\vec{\Lambda}_{1s}}{L'_s} - \frac{L_m}{L_r L'_s}\vec{\Lambda}_{1r}\right)e^{j\omega_s t}$$
$$\vec{I}_{ss2}e^{-j\omega_s t} = \left(\frac{\vec{\Lambda}_{2s}}{L'_s} - \frac{L_m}{L'_s L_r}\vec{\Lambda}_{2r}\right)e^{-j\omega_s t}\ . \tag{2-49}$$

La componente DC, Ecuación 2-46, está relacionada con el vector propio de baja frecuencia, mientras que la componente transitoria, Ecuación 2-47, está relacionada con el vector propio cuyo valor de frecuencia es cercano al valor de la frecuencia síncrona del sistema[1]. Adicionalmente, el término de estado estable está compuesto por las componentes de secuencia positiva y secuencia negativa a frecuencia síncrona.
En el artículo base [21], una expresión diferente para la componente de estado estable de la corriente es propuesta, en donde se omite el aporte de la componente de secuencia negativa. La expresión es la siguiente:

$$\vec{I}_{ss}e^{j\omega_s} = \left[\left(\frac{\vec{\Lambda}_{1s}}{L'_s} - \frac{L_m}{L_r L'_s}\vec{\Lambda}_{1r}\right) - \left(\frac{\vec{\Lambda}_{2s}}{L'_s} - \frac{L_m}{L'_s L_r}\vec{\Lambda}_{2r}\right)^*\right]e^{j\omega_s} \ . \tag{2-50}$$

Esta componente de estado estable conlleva a una nueva expresión para la corriente de cortocircuito dada por:

$$\vec{i}_s = \vec{I}_{dc}e^{\psi_1(t-t_0)} + \vec{I}_t e^{\psi_2(t-t_0)} + \vec{I}_{ss}e^{j\omega_s t} \ . \tag{2-51}$$

En la siguiente sección se analizarán las diferencias entre los cálculos realizados con la Ecuación 2-51 o Cálculo 1, y la Ecuación 2-45 o Cálculo 2, debidas a los cambios en las expresiones de corriente de estado estable.

2.2. Simulaciones y resultados

En esta sección se analizan y se presentan las simulaciones realizadas en *Matlab* de las ecuaciones de cortocircuito, Ecuación 2-45 y Ecuación 2-51. Se utilizan como parámetros de comparación las ecuaciones dinámicas de las corrientes obtenidas con el marco de referencia QD0 explicado en la Sección 1.4 las cuales fueron simuladas en la herramienta computacional *Simulink*.
Se analizaron 5 máquinas diferentes cuando en sus terminales ocurren fallas simétricas y fallas asimétricas. Las potencias de las máquinas analizadas son de 1 *hp*, 10 *hp*, 20 *hp*, 500 *hp* y 2400 *hp*[2].

2.2.1. Fallas simétricas

En la operación de estado estable la máquina de inducción genera un vector giratorio del campo magnético que es producido por los aportes que cada fase realiza en un periodo determinado, y que además describe una circunferencia durante la operación balanceada de la máquina. Al ser la máquina un sistema trifásico se tienen tres ondas de fmm; cuando una

[1] Las componentes DC y transitoria van disminuyendo su valor a lo largo del tiempo hasta alcanzar una magnitud igual a cero.
[2] Los parámetros de las máquinas se encuentran en el Apéndice A.

de estas ondas se encuentra en su valor máximo, la magnitud de las otras dos ondas es igual a $\mathbf{F_{max}/2}$, por lo tanto el vector resultante presenta un comportamiento constante con una magnitud igual a $3/2\mathbf{F_{max}}$ en todo instante, ver Figura **2-1**.

Cuando ocurre una perturbación en los terminales de la máquina de inducción debido a un cortocircuito trifásico, el vector de campo magnético va cambiando su magnitud hasta alcanzar un valor igual a cero. Lo anterior se debe a que la máquina recibe su magnetización de la red y al perder conexión con ella, el vector va disminuyendo su radio hasta que la energía remanente en la máquina es disipada. A pesar de que esta energía no es suficiente para que la máquina opere en un nuevo punto de estado estable, si permite generar corrientes de falla durante algunos periodos de la onda sinusoidal [31–33].

El vector giratorio de campo magnético produce un cierto número de espirales que está definido por la parte imaginaria de los valores propios de la matriz de estados, Ecuación 2-5, y cuyo tiempo de desvanecimiento está dado por la parte real. Dicho vector está asociado a un vector de corriente espacial que tiene la misma forma de onda, y para el cual fueron definidas dos enfoques, el primero es la ecuación propuesta en esta tesis, Ecuación 2-45, y el segundo es el vector obtenido en la formulación presentada en [21], Ecuación 2-51.

En la Figura **2-2**, se puede observar diferentes corrientes espaciales de cortocircuito ante fallos simétricos para las máquinas de inducción mencionadas anteriormente. Los cortocircuitos fueron aplicados con $t = 0\ s$, lo que implica que la tensión en la fase a en ese instante es igual a cero, $v_a(t = 0) = 0\ V$. Se puede observar que durante los primeros instantes de la falla la magnitud del vector espacial es muy grande y éste empieza a desvanecerse a medida que transcurre la falla, generando así una serie de espirales que van disminuyendo su radio hasta alcanzar un valor cercano a cero.

La diferencia entre los enfoques de las expresiones de cortocircuito con notación espacial, Ecuación 2-45 y Ecuación 2-51, radica principalmente en la componente de estado estable. Como esta componente no existe en una falla simétrica, el vector de fmm total no alcanza a describir circunferencias pese a que el sistema sigue siendo equilibrado, por lo tanto las ecuaciones (2-45) y (2-51) generan funciones que se superponen una con la otra en todas las máquinas analizadas.

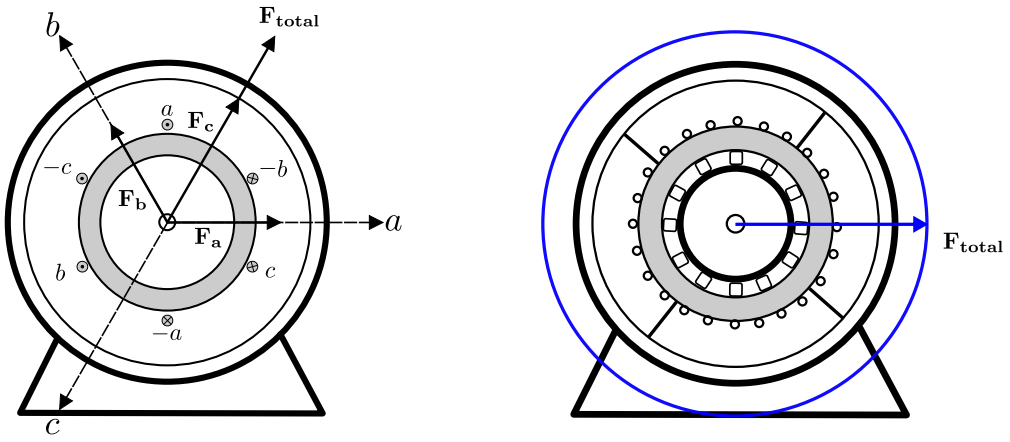


Figura 2-1.: Vector espacial de la fmm en un sistema equilibrado.

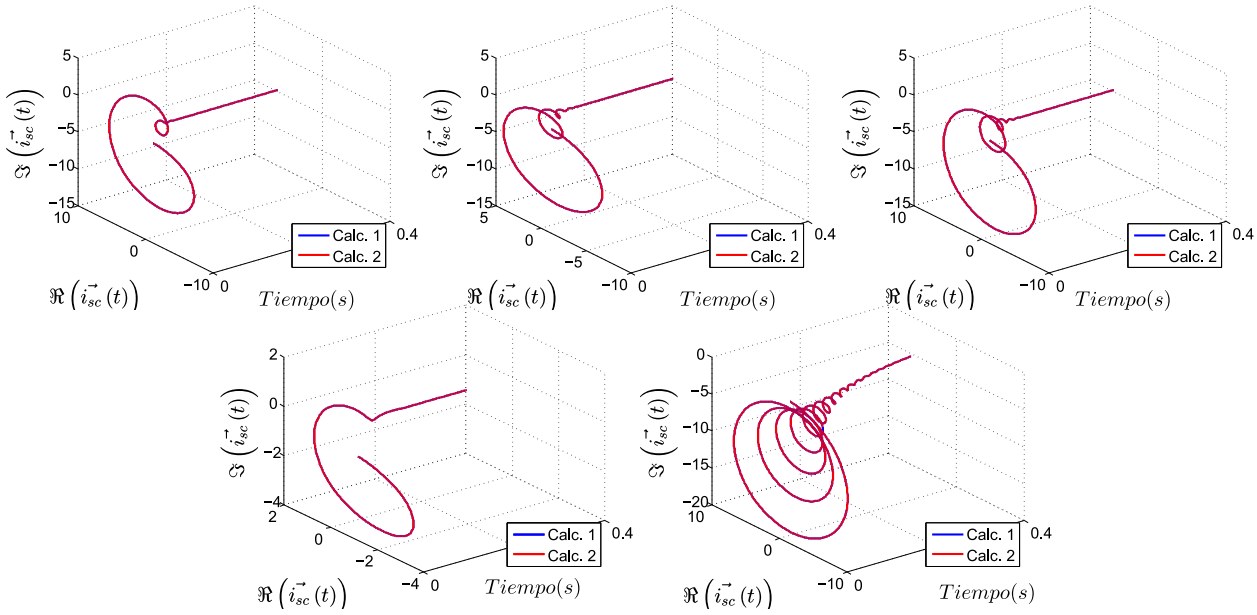


Figura 2-2.: Transitorio de la corriente espacial durante una falla trifásica. Máquinas de 1, 10, 20, 500 y 2400 hp.

En el caso de la máquina de 2400 hp se puede observar que no solo hay un tiempo mayor de desvanecimiento de la forma de onda, sino que también existe un número mayor de espirales en comparación con las otras máquinas analizadas. Esto significa que la máquina conserva una cantidad considerable de energía en el momento en que ocurre el cortocircuito y por lo tanto puede aportar corrientes de cortocircuito durante más tiempo. En el caso de una máquina de 1 hp se puede observar que tanto el tiempo de desvanecimiento como la frecuencia de oscilación son menores respecto a las otras máquinas, esto se debe a que la energía que puede almacenar la máquina es menor.

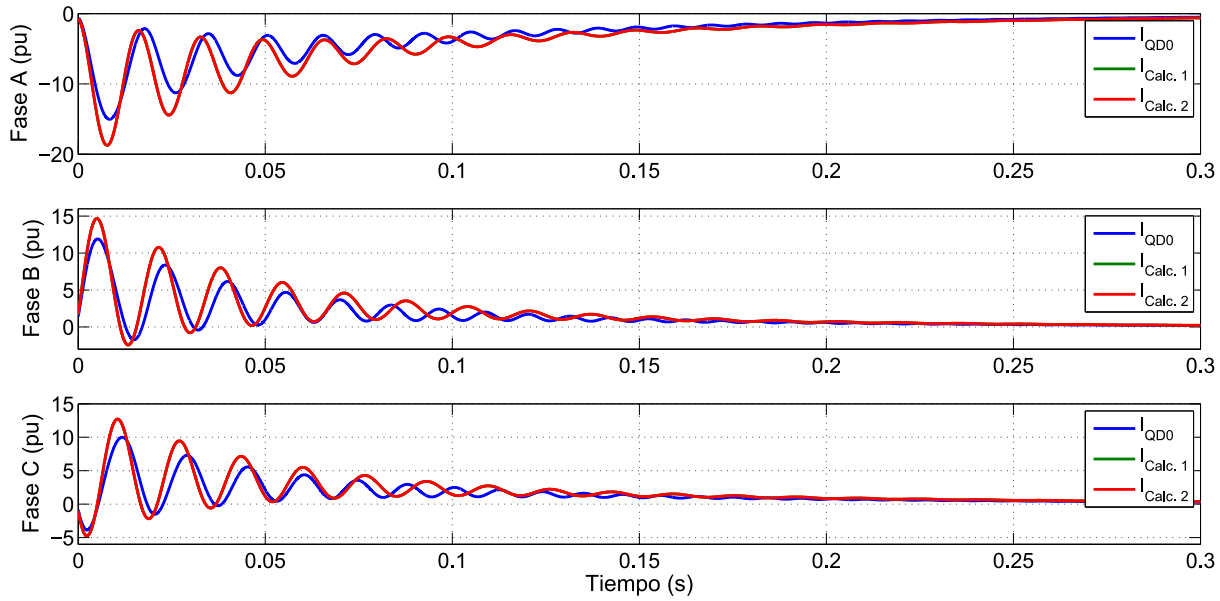
El vector espacial de la corriente de cortocircuito no forma una circunferencia en ninguno de los casos, no obstante los comportamientos de las corrientes espaciales de cortocircuito siguen siendo balanceados. Esto se debe a que la energía magnética remanente está distribuida en sus tres fases simétricamente. Aprovechando el hecho de que los sistemas simétricos se caracterizan porque la sumatoria de las variables eléctricas es igual a cero, entonces es posible demostrar la simetría de las corrientes espaciales ilustradas en la Figura **2-2** por medio de la sumatoria de sus componentes instantáneas.

Para encontrar las componentes instantáneas de las corrientes espaciales de cortocircuito, Ecuación 2-45 y Ecuación 2-51, es necesario operar las ecuaciones con la ecuación de conversión, Ecuación 1-46. Para realizar la validación respectiva de las simulaciones, se emplearon simulaciones dinámicas de las máquinas utilizando el marco de referencia QD0 explicado en la Sección 1.4.

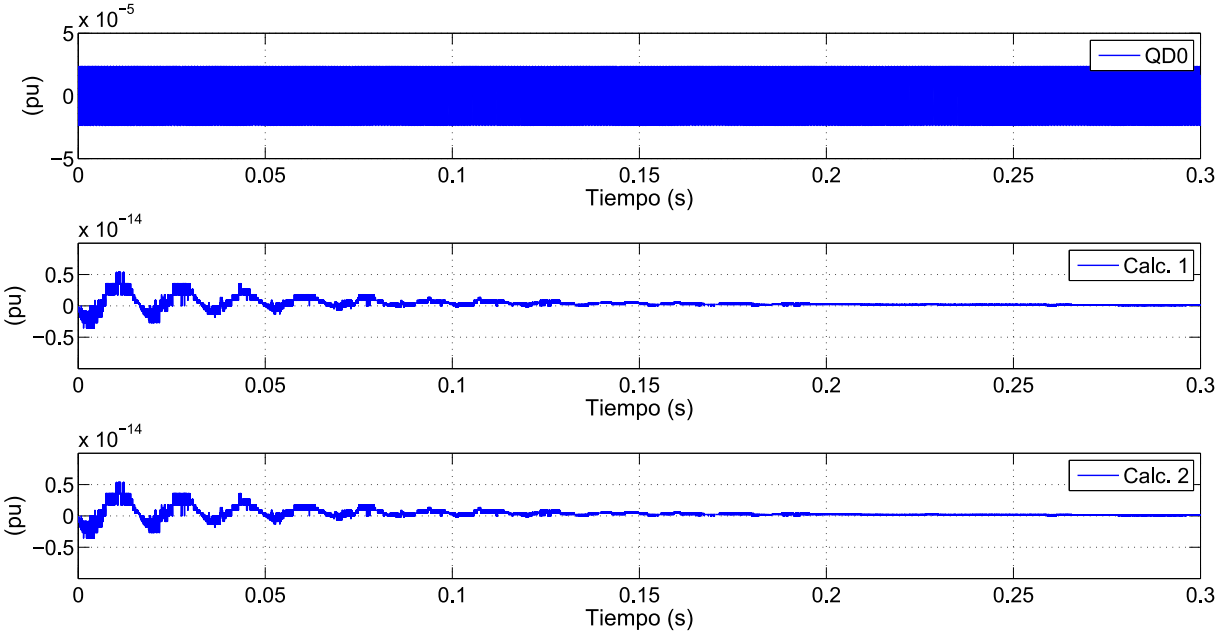
En la Figura **2-3** y la Figura **2-4** se pueden observar las simulaciones realizadas de las corrientes instantáneas de las máquinas durante cortocircuitos trifásicos. Además, se pueden observar las sumatorias de las corrientes de fase calculadas con los 3 enfoques mencionados anteriormente para 2 máquinas diferentes.

Con las sumatorias se puede demostrar la simetría de las corrientes espaciales de falla, al corroborar que las magnitudes de éstas tienden a cero. Los enfoques, Cálculos 1 y 2, generan magnitudes pequeñas del orden de 10^{-15} pu. La sumatoria de las corrientes instantáneas encontradas con el marco de referencia QD0 tiene una magnitud mayor, del orden de 10^{-5} pu, sin embargo, como su magnitud está expresada en pu, ésta sigue siendo demasiado pequeña.

Solo se presenta las simulaciones de las máquinas de 2400 hp y de 1 hp, debido a que estas dos máquinas describen de forma general y precisa el comportamiento de las otras máquinas cuando se aplica una falla trifásica en sus terminales.

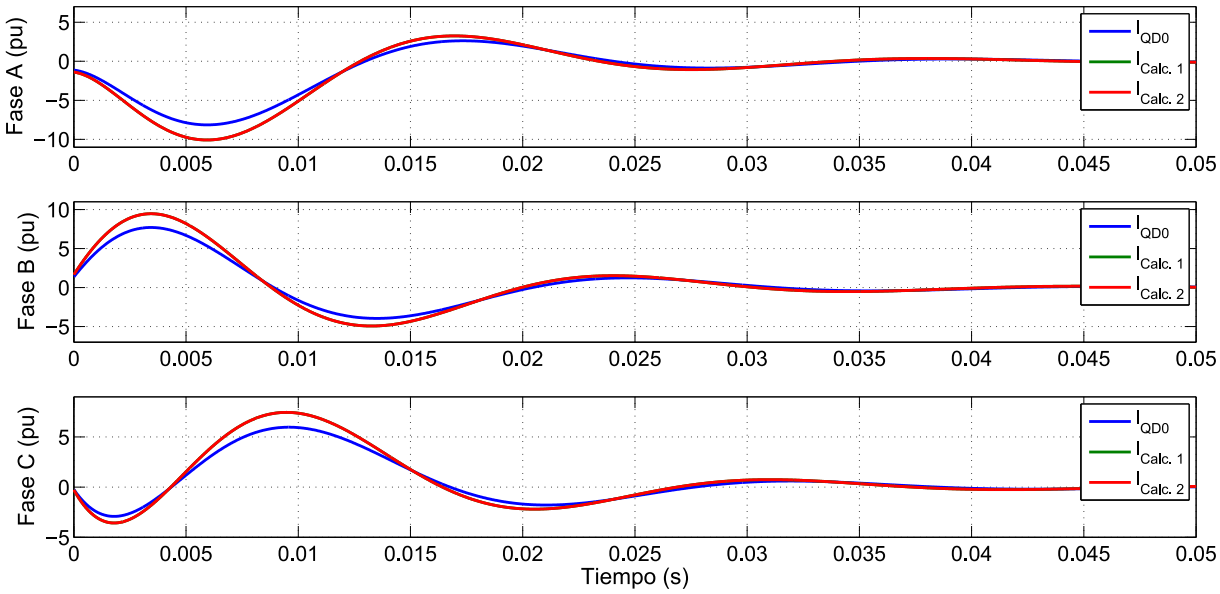


(a) Corrientes instantaneas de las fases a,b y c respectivamente.

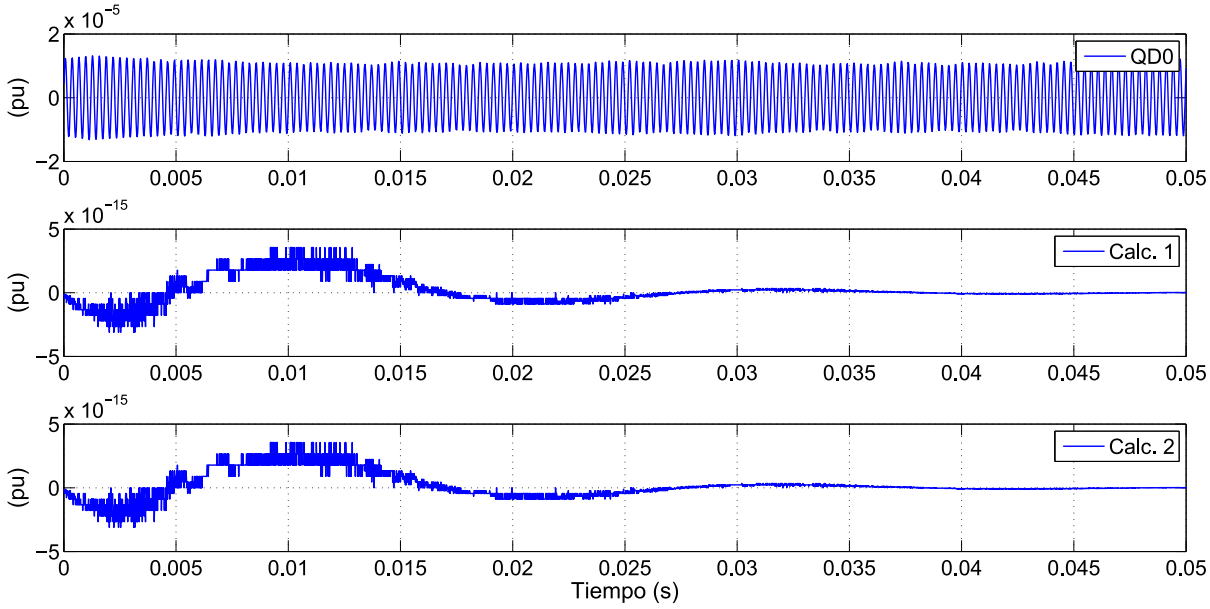


(b) Sumatoria de las corrientes instantáneas.

Figura 2-3.: Falla simétrica aplicada a una máquina de 2400 hp.



(a) Corrientes instantaneas de las fases a,b y c respectivamente.



(b) Sumatoria de las corrientes instantáneas.

Figura 2-4.: Falla simétrica aplicada a una máquina de 1 hp.

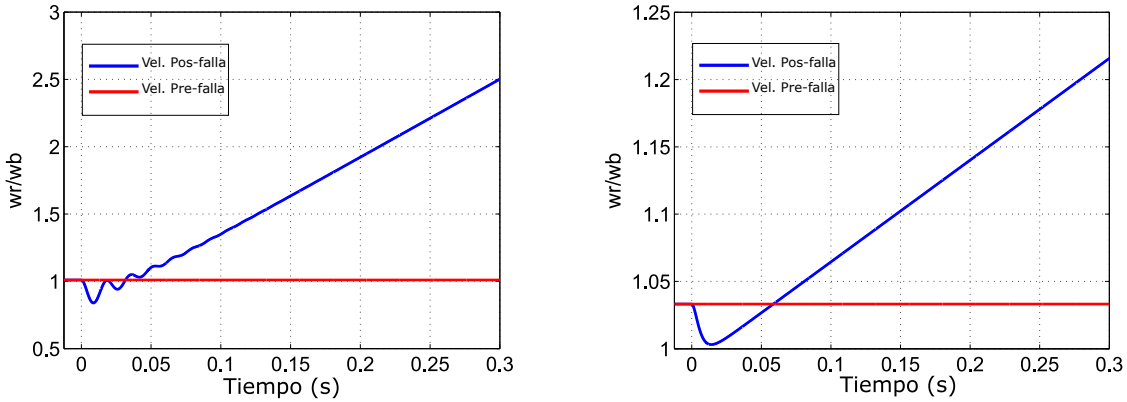
Las diferencias entre las corrientes instantáneas calculadas con los diferentes enfoques se debe principalmente a la suposición de que durante los primeros instantes de un cortocircuito la velocidad de la máquina no cambia significativamente. Para realizar las simulaciones es

necesario utilizar el valor de la velocidad de prefalla para que la matriz de estados de la Ecuación 2-5 se vuelva constante compleja, y de esta forma se pueda encontrar una solución analítica de los flujos de la máquina, los cuales permiten obtener las expresiones de las corrientes espaciales de cortocircuito.

En la Figura **2-5** se puede observar las magnitudes de las velocidades de prefalla comparadas con las funciones de velocidades de las máquinas; en donde w_b es la velocidad angular base, y w_r es la velocidad angular del rotor. En el caso de la máquina de 1 hp la velocidad alcanza un valor de 1,22 pu en los primeros 300 ms de la falla, lo que implica una diferencia del 19 % entre la velocidad de la máquina y la velocidad de prefalla. Aunque la diferencia entre las velocidades es grande cuando $t = 300$ ms, no existe un impacto significativo en la magnitud de la corriente. Esto se debe a que la magnitud de la corriente, cuando la velocidad empieza a aumentar, está decreciendo significativamente y se está acercando a cero, por lo tanto el efecto que tiene la velocidad en las corrientes no es apreciable ni significativo para fallas trifásicas. La mayor diferencia entre las magnitudes calculadas con los diferentes enfoques se produce en el estado transitorio, en donde existe una caída de velocidad igual al 2,7 % respecto a la velocidad de prefalla, provocando así que la magnitud de las corrientes calculadas con los Cálculos 1 y 2 sean más grandes.

En el caso de la máquina de 2400 hp la diferencia entre las velocidades de prefalla y la función de velocidad de la máquina alcanza un valor mucho más grande comparada con el caso de la máquina de 1 hp, ya que la diferencia entre las velocidades es de 1,49 pu cuando $t = 300$ ms, pero al igual que en el caso anterior, el hecho de que no haya corriente de estado estable durante fallas trifásicas, implica que esta diferencia de las velocidades no afecta el cálculo de las corrientes transitorias, las cuales generan las mayores magnitudes de corriente. Durante este estado transitorio existe una caída de velocidad del 17 % en la máquina de 2400 hp, que se traduce en pequeños cambios de magnitud entre los diferentes enfoques provocando así que las corrientes calculadas con el marco de referencia QD0 tenga valores menores a los otros dos enfoques.

Para el caso trifásico, las corrientes calculadas con la Ecuación 2-51 y con la Ecuación 2-45 se superponen entre sí, por lo tanto la conversión de estos vectores en sus componentes instantáneas también genera que dichas funciones se superpongan y se analicen de la misma forma.



(a) Máquina de 2400 hp.

(b) Máquina de 1 hp.

Figura 2-5.: Velocidades de la máquina de inducción durante un cortocircuito trifásico.

Se procede entonces a calcular los errores de las señales utilizando el error cuadrático medio (ECM), ya que éste permite medir el promedio de los errores al cuadrado y por lo tanto brinda información sobre la diferencia que tienen las señales calculadas con los dos enfoques. En la Tabla **2-1** se pueden observar los errores que existen entre las corrientes instantáneas para fallas simétricas.

Tabla 2-1.: Error cuadrático medio. Falla Trifásica.

Máquinas	***Fuente Balanceada***			***Fuente Desbalanceada***		
	Cálculo. 1 y 2			***Cálculo. 1 y 2***		
	Fase A	***Fase B***	***Fase C***	***Fase A***	***Fase B***	***Fase C***
1 hp	0,25 %	0,20 %	0,14 %	0,25 %	0,15 %	0,45 %
10 hp	1,38 %	1,46 %	1,17 %	0,65 %	0,60 %	1,74 %
20 hp	1,62 %	1,46 %	1,30 %	0,75 %	0,64 %	1,74 %
500 hp	0,29 %	0,30 %	0,05 %	0,37 %	1,14 %	2,81 %
2400 hp	4,43 %	2,05 %	1,71 %	15,24 %	22,02 %	73,91 %

Debido a que los dos enfoques generan la misma forma de onda del vector espacial, de la misma manera lo hacen con las formas de onda de las corrientes instantáneas lo que produce que los errores existentes entre los dos enfoques y la señal parámetro sean los mismos.

Se realizaron simulaciones con sistemas de alimentación asimétricos debido a que la definición de los vectores espaciales está dada para sistemas instantáneos simétricos y asimétricos. Adicionalmente, la Ecuación 1-41 admite la variación del sistema por medio de la constante c explicada en la Subsección 1.3.3. Además, actualmente existen pequeñas asimetrías en las redes de alimentación que pueden presentarse en el momento de ocurrencia de un corto-

circuito. Es importante aclarar que los desbalances en las fuentes de alimentación son muy pequeñas y pueden ocurrir sobre todo por un desbalance en la cargabilidad del sistema más no por suministros inapropiados de las plantas generadoras.

En la Tabla **2-1** se puede observar que el error es pequeño para la mayoría de los casos, incluyendo aquellos de fuentes desbalanceadas. La máquina de 2400 hp presenta errores significativos cuando la alimenta una fuente desbalanceada, esto se debe a que la componente DC de la señal parámetro es mayor que en las otras señales debido a los cambios de la velocidad en los primeros instantes del corto.

En consecuencia las metodologías que utilizan los vectores para el cálculo dinámico de las corrientes durante un cortocircuito trifásico son lo suficientemente precisas y permiten disminuir el esfuerzo de cálculo que requieren los métodos numéricos.

2.2.2. Fallas asimétricas

Las fallas asimétricas en las máquinas de inducción están caracterizadas porque al menos una de las fases de alimentación permanece conectada durante el cortocircuito. Esto permite que exista un suministro de energía eléctrica para que la máquina continúe en operación. Como resultado, la máquina alcanza un nuevo punto de estado estable que se caracteriza por ser desbalanceado, lo que es debido a la asimetría de las tensiones y al cambio de la velocidad.

Al igual que en el caso simétrico, existe un vector giratorio de fuerza magnetomotriz que define una corriente de cortocircuito definido por las ecuaciones (2-45) y (2-51). Debido a que durante las fallas asimétricas existe una componente de estado estable, es necesario analizar las diferencias entre estos dos enfoques que se presentan por lo cambios existentes en la formulación de dicha componente.

Fallas monofásicas

Cuando existe una falla monofásica, el vector espacial de fmm dibuja una elipse con una inclinación de 90° medidos desde el eje mayor de la elipse hasta el eje magnético de la fase en la que ocurrió la falla, ver Figura **2-6**. Dicha descripción de las elipses se da tanto para el estado transitorio como para el estado estacionario, sin embargo sus magnitudes e inclinaciones van cambiando a medida que ocurre la falla debido a una reorganización del campo magnético durante algunos instantes.

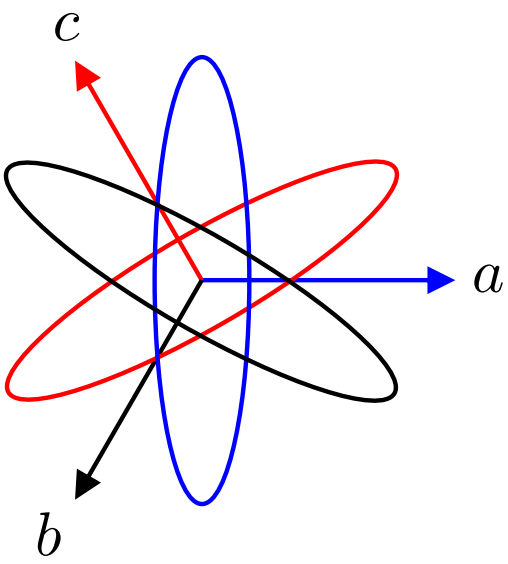


Figura 2-6.: Representación de las elipses definidas por el vector espacial de fmm en fallas monofásicas.

Las dos fases que mantienen conexión con la máquina son quienes suministran su magnetización, además son quienes generan el vector de fmm resultante, ver Figura **2-7**. Dependiendo del enfoque que se utilice para la definición del vector espacial, las elipses van a cambiar la relación de sus ejes. Con el Cálculo. 1 se tendrá una definición de las elipses mucho más suavizada que con el Cálculo. 2, es decir, la elipse tiende a convertirse en una circunferencia ya que la relación entre sus ejes es cercana a 1.

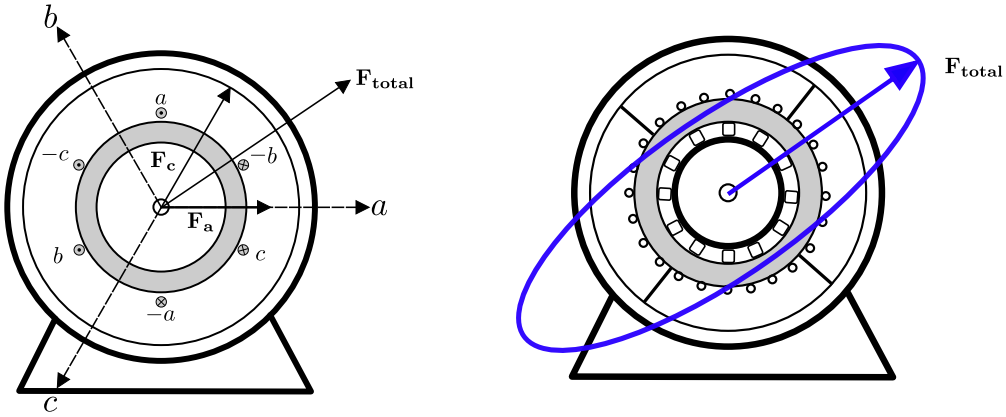


Figura 2-7.: Vector espacial de la fmm en un sistema desequilibrado debido a una falla monofásica.

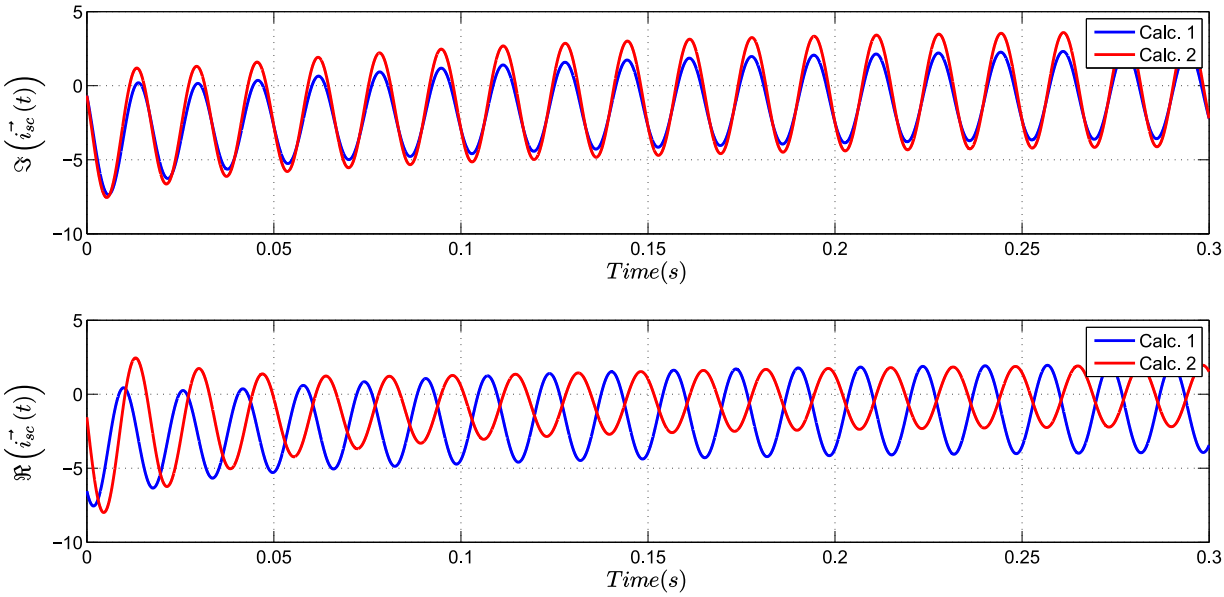
En la Figura **2-8** y la Figura **2-9** se puede observar el comportamiento del vector espacial de cortocircuito $\vec{i}_s(t)$, al igual que sus componentes $\Re\{\vec{i}_s(t)\}$ y $\Im\{\vec{i}_s(t)\}$ junto con el cambio de las elipses durante el transitorio de la máquina.

El transitorio en la máquina de 2400 hp tiene una mayor duración que el transitorio en la máquina de 1 hp. Al observar las Figuras 2.8(c) y 2.9(c), es posible afirmar que al aumentar la potencia de la máquina aumenta también la energía que puede almacenar, lo cual se traduce en transitorios más prolongados. Como resultado, el número de espirales que describe el vector espacial de corriente definido por la parte imaginaria de los valores propios de la matriz de estados, es mucho mayor en comparación con máquinas de menor potencia. Para este caso es posible apreciar la tendencia de las elipses calculadas con la Ecuación 2-51 a formar círculos, tal y como se mencionó anteriormente.

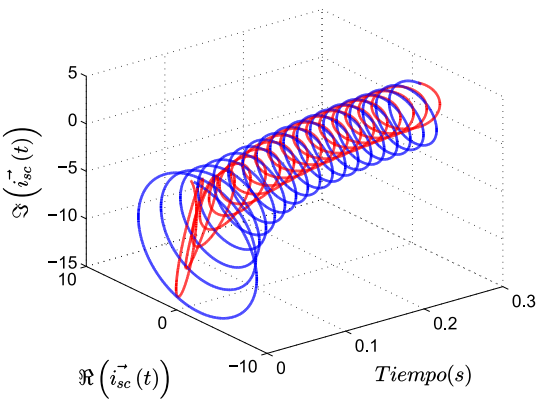
Ya se comentó que las ecuaciones de los vectores espaciales difieren únicamente en la formulación de la componente de estado estable, pero los vectores en sí, difieren principalmente en su parte real ya que en ella se encuentran cambios significativos no sólo en el desfase sino también en la magnitud, ver Figuras 2.8(a) y 2.9(a). Las formas de onda de las componentes imaginarias de la corriente espacial cambian principalmente en pequeños valores de la magnitud, los cuales pueden variar desde 0,46 pu hasta 0,89 pu cuando se analizan las 5 máquinas. Se puede decir que estos valores comparados con las magnitudes de las corrientes de cortocircuito son pequeños ya que se pueden encontrar magnitudes de 12 pu en las corrientes de cortocircuito.

Una de las características del vector espacial de corriente de cortocircuito encontrado con el Cálculo 1 es que los picos tanto de la parte real como de la parte imaginaria tienen valores muy cercanos uno respecto al otro; esta es la razón por la cual la relación entre los ejes de las elipses es cercana a uno y por eso tiende a dibujar circunferencias.

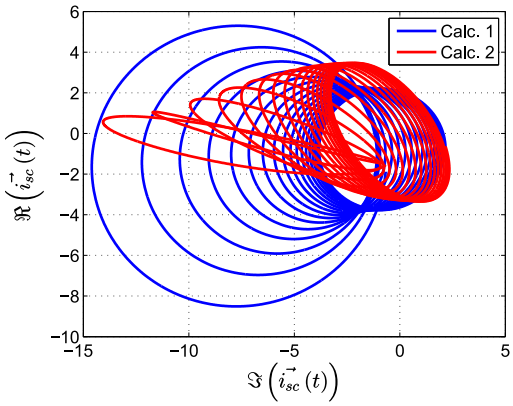
El caso contrario ocurre cuando se observa la corriente encontrada con el Cálculo 2. En este caso las magnitudes de la parte real son pequeñas durante el periodo transitorio y estas aumentan su valor hasta alcanzar el estado estable. Esto conlleva a una descripción de las elipses más achatada, lo que implica dinámicas complejas durante el transitorio del cortocircuito que se evidencian en las corrientes instantáneas de fase, y también en los aumentos de magnitud de la componente de doble frecuencia en la función de magnitud del vector.



(a) Parte real y parte imaginaria.

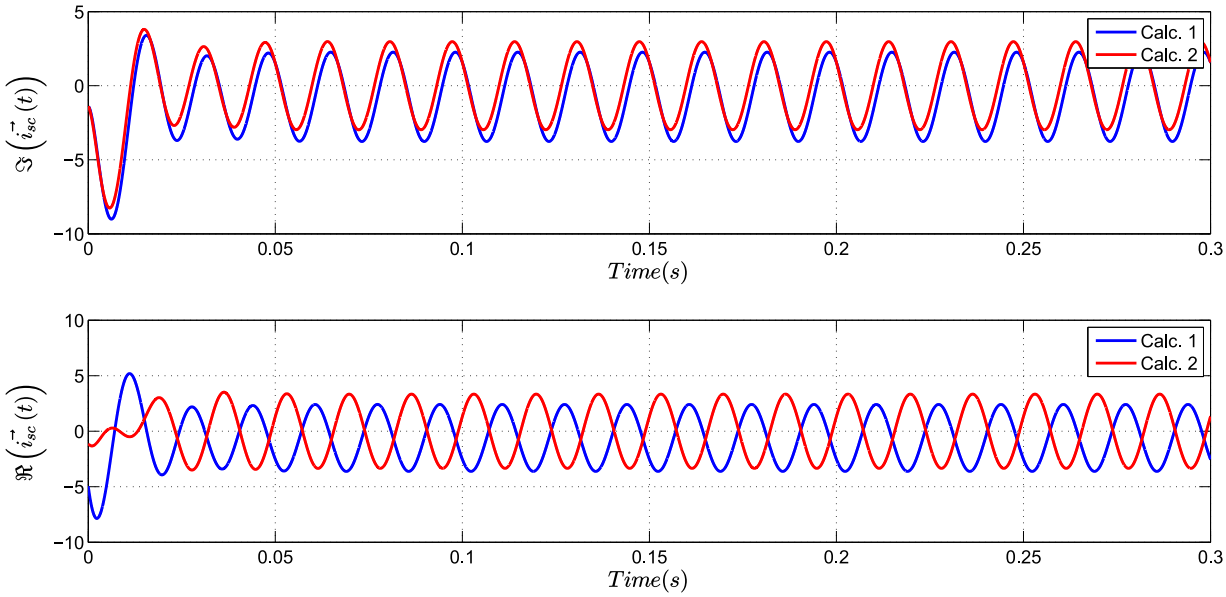


(b) Vector espacial de corriente de cortocircuito.

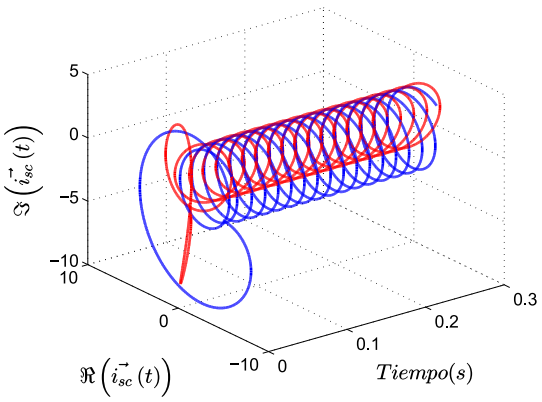


(c) Elipses generadas durante el cortocircuito.

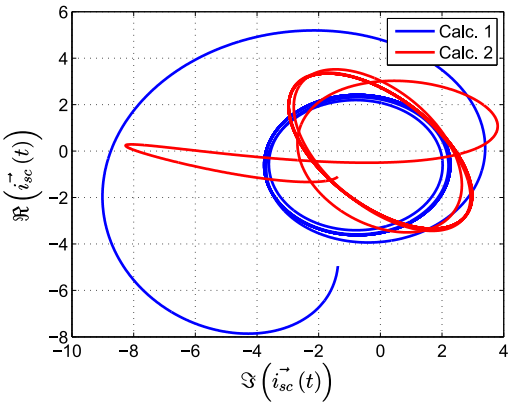
Figura 2-8.: Corriente espacial de cortocircuito. Máquina de 2400 hp.



(a) Parte real y parte imaginaria.



(b) Vector espacial de corriente de cortocircuito.



(c) Elipses generadas durante el cortocircuito.

Figura 2-9.: Corriente espacial de cortocircuito. Máquina de 1 hp.

Se procede entonces a analizar las formas de onda de las funciones de magnitud, del ángulo y del vector de corriente en el dominio de la frecuencia. Esto permite comparar los errores en las señales sin tener en cuenta los errores que puedan existir por desfases y no por las formas de onda específicamente.

Se definirán entonces la transformación de las señales instantáneas del vector espacial de corriente de cortocircuito, su señal de magnitud y su señal de ángulos, utilizando la trans-

formada discreta de Fourier, así:

$$I_s(\omega) = \mathcal{F}\{\vec{i}_s(t)\} \tag{2-52}$$

$$I_{ms}(\omega) = \mathcal{F}\{\|\vec{i}_s(t)\|\} \tag{2-53}$$

$$I_{as}(\omega) = \mathcal{F}\{\measuredangle\vec{i}_s(t)\}\ , \tag{2-54}$$

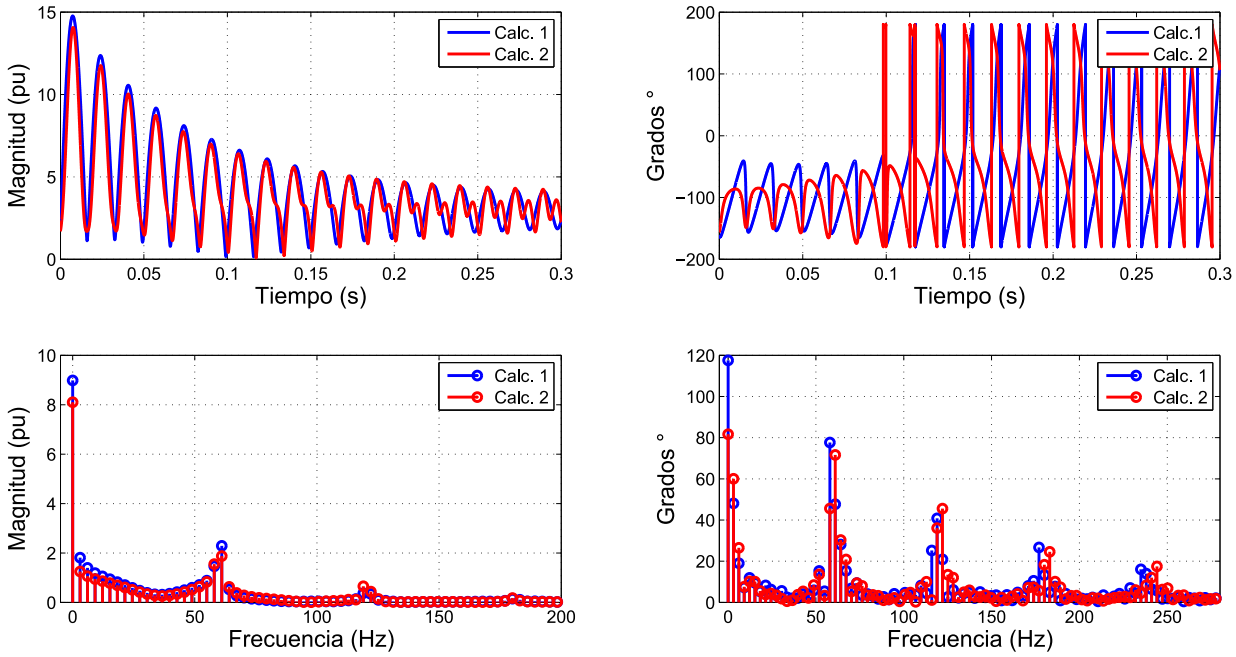
donde los subíndices s, ms y as hacen referencia a las funciones del vector espacial de corriente en el estator, a su función de magnitud y a su función de ángulo respectivamente.

En la Figura **2-10** se puede observar el comportamiento de las señales de magnitud y ángulo de los vectores espaciales de cortocircuito tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Al observar la función de magnitud de las dos máquinas se puede evidenciar que la componente DC presenta el mayor aporte entre todos los armónicos de la señal debido precisamente a que es una análisis del valor absoluto de la onda de magnitud, en consecuencia todos sus valores van a ser positivos y sus envolventes estarán muy cercanas una respecto a la otra.

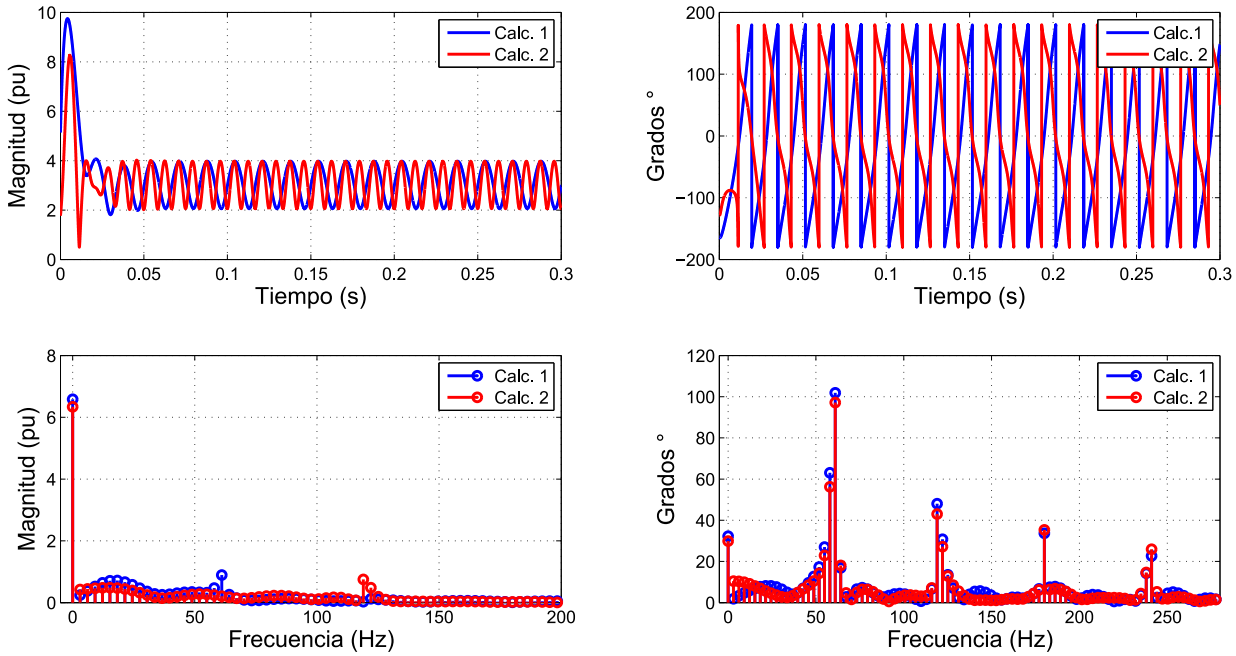
Esta señal presenta un rizado que está asociado a una componente de doble frecuencia, la cual se produce debido a que el vector de corriente alcanza su magnitud máxima y su magnitud mínima dos veces durante un ciclo de la onda sinusoidal. Utilizando el Cálculo. 1 se encuentra una componente menor de doble frecuencia debido a la tendencia de dibujar circunferencias, lo cual explica que las cantidades del valor máximo y del valor mínimo sean similares. También se puede encontrar una componente de frecuencia fundamental, que está asociada al comportamiento periódico de la señal de alimentación.

Al igual que en las funciones de magnitud, las funciones de ángulos están compuestas por una serie de interarmónicos, sin embargo, los aportes más importantes se encuentran en los armónicos $0, 1, 2, 3, 4$ y 5. Los armónicos siguientes también tiene aportes en la señal pero no son significativos para la reconstrucción de la misma. Las señales de los ángulos son muy similares ya que estas representan el movimiento del vector espacial y por consiguiente la representación de Fourier de ellas involucra errores del 0,13 % y 1,52 % para las máquinas de 1 hp y 2400 hp respectivamente.

Al realizar el análisis de Fourier de los vectores de corriente ilustrados en las Figuras 2.8(b) y 2.9(b) se obtienen las funciones ilustradas en la Figura **2-11**. Se puede observar que las principales diferencias se encuentran en la componente DC y en la componente fundamental, la cual representa los cambios de la corriente espacial de cortocircuito en el estado estable tal y como lo establecen las ecuaciones (2-45) y (2-51). Las frecuencias bajas dominan el comportamiento de los vectores, ya que los dos valores propios que describen las máquinas involucran frecuencias desde 0,09 Hz hasta 63,83 Hz. En estas funciones no se evidencian las componentes de doble frecuencia, ya que estas están asociadas a las funciones de magnitud.

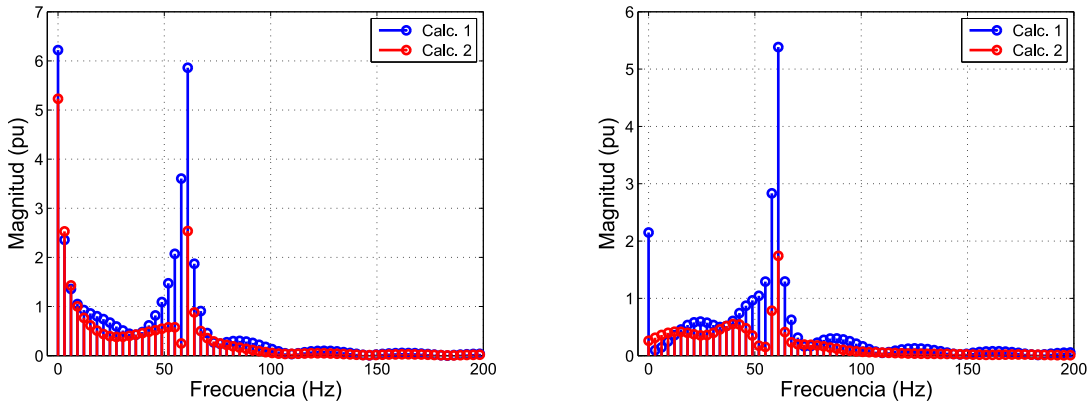


(a) Máquina de 2400 hp.



(b) Máquina de 1 hp.

Figura 2-10.: Magnitud y ángulo de los vectores espaciales de corriente de cortocircuito.



(a) Máquina de 2400 hp. (b) Máquina de 1 hp.

Figura 2-11.: Vector espacial de corriente de cortocircuito en el dominio de la frecuencia.

En la Tabla **2-2** están tabulados los errores encontrados en las funciones espaciales de cortocircuito, en las funciones de magnitud y en las funciones de ángulo cuando fallas monofásicas son aplicadas en los terminales de las 5 máquinas. Las simulaciones se realizaron cuando sistemas de alimentación tanto simétricos como asimétricos alimentan las máquinas para así definir la exactitud de los modelos mencionados.

Tabla 2-2.: Error cuadrático medio para las corrientes espaciales de cortocircuito

Máquinas	***Fuente Balanceada***			***Fuente Desbalanceada***		
	$\|\vec{i}_s(\omega)\|$	$\measuredangle\vec{i}_s(\omega)$	$\vec{i}_s(\omega)$	$\|\vec{i}_s(\omega)\|$	$\measuredangle\vec{i}_s(\omega)$	$\vec{i}_s(\omega)$
1 hp	1,32 %	0,13 %	19,06 %	1,19 %	0,05 %	76,45 %
10 hp	0,84 %	0,25 %	12,96 %	5,87 %	0,25 %	36,53 %
20 hp	1,12 %	0,18 %	19,40 %	4,82 %	0,17 %	58,22 %
500 hp	0,59 %	0,41 %	3,48 %	13,72 %	2,91 %	47,41 %
2400 hp	1,32 %	1,52 %	21,55 %	26,06 %	2,66 %	81,78 %

Para el caso de una fuente de alimentación simétrica los errores encontrados entre las funciones de magnitud y las funciones de los ángulos son pequeños para todos los casos, el error máximo se encuentra en la máquina de 2400 hp en la función del ángulo con un valor de $1,52$ %; no obstante cuando se analizan los vectores espaciales completos el error aumenta en un $13,8$ %.

Cuando se analiza el caso en donde la fuente de alimentación es asimétrica, los errores aumentan significativamente. Tal es el caso de la máquina de 2400 hp, la cual presenta una diferencia en el cálculo de la corriente de cortocircuito con los dos enfoques de $81,8$ %. Para este caso el promedio de los errores de $\|\vec{i}_s(\omega)\|$ es de $10,3$ %, lo cual difiere en un $9,3$

% respecto a los casos simétricos. Es necesario destacar que los errores encontrados de la función $\measuredangle\vec{i}_s(\omega)$ son pequeños tanto para el caso simétrico como para el caso asimétrico con valores de $0,49$ % y $1,2$ % respectivamente.

Es posible afirmar entonces que la diferencia principal entre los enfoques se encuentra en la magnitud del vector, y no en la función que corresponde a los ángulos, ya que esta última lo que hace es describir un sentido de giro similar para ambos enfoques en tiempos aproximadamente iguales.

Los datos presentados en la Tabla **2-2** representan la diferencia entre señales calculadas con los dos enfoques, pero no representan la diferencia de las corrientes instantáneas ni la cercanía que tienen con simulaciones dinámicas de la máquina, para ello es necesario utilizar las simulaciones realizadas con el marco de referencia QD0 y comparar estos dos enfoques con dichas simulaciones.

Los cambios en la forma de onda del vector espacial de corriente afecta directamente el comportamiento de las corrientes instantáneas, ya que la componente de estado estable afecta también el estado transitorio de las corrientes, y es debido a esto que se generan diferencias en la componente DC cuando se analizan las componentes de Fourier [3].

Ya se observaron y analizaron los cambios que ocurren en la forma de onda de la corriente espacial de cortocircuito cuando existen fallas monofásicas, sin embargo, es necesario observar el comportamiento de las corrientes instantáneas de cortocircuito, porque estas son las que nos permiten diseñar los sistemas de protección y realizar un buen dimensionamiento de los elementos para una buena operación del sistema.

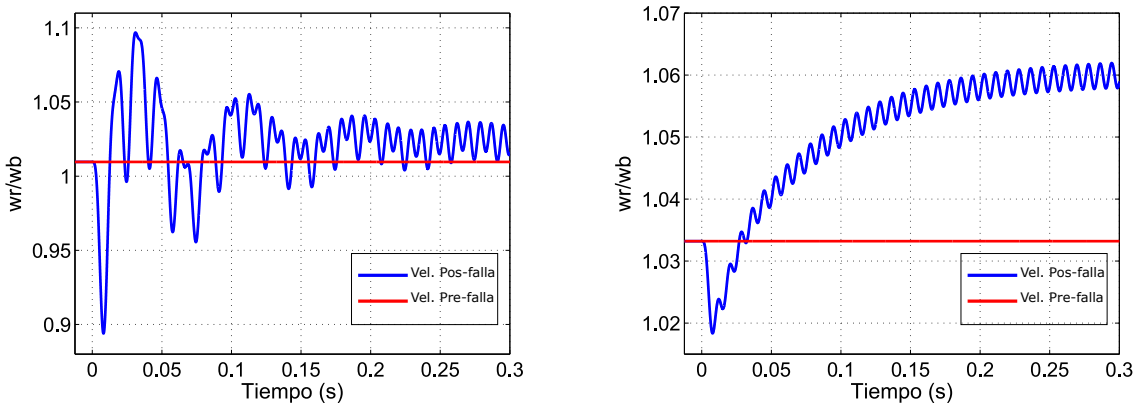
Al igual que en el caso trifásico, se utilizaron simulaciones dinámicas de la máquina de inducción en el marco de referencia estacionario QD0, con el fin de obtener una forma de onda que sirviera como parámetro de comparación. Se simularon entonces las componentes instantáneas por fase de las corrientes (2-45) y (2-51) utilizando la ecuación de conversión, Ecuación 1-46.

La Figura **2-13** muestra las corrientes instantáneas obtenidas con los tres enfoques. En ella se puede observar como las corrientes obtenidas con el Cálculo 1 presentan más diferencias respecto a la onda parámetro, que las ondas obtenidas con el Cálculo 2. En las simulaciones de la corriente de la fase A, que corresponde a la fase en donde ocurrió la falla, las ondas de corriente son más cercanas una respecto a la otra. Para esta fase el mayor valor pico de la corriente se encuentra medio ciclo después de que ocurre la falla, y el menor valor encontrado entre los tres enfoques es el obtenido con el modelo QD0 de la máquina. Esto se debe a los

[3] Estas diferencias son más pronunciada dependiendo de la máquina que se analice.

cambios en las velocidades durante los primeros instantes del corto, ya que al ser esta menor que la velocidad de prefalla la magnitud de la corriente es menor, ver Figura **2-12**. En las simulaciones de las fases B y C el Cálculo 2 es quien presenta las simulaciones más cercanas respecto a la señal parámetro comparada con las simulaciones realizadas con el Cálculo 1, ya que estas presentan diferencias en el comportamiento que corresponden a cambios en las magnitudes y en los desfases.

La diferencia en las corrientes de estado estable dependen directamente de las funciones de velocidad. Los valores de la corriente en este periodo serán muy cercanos a la señal parámetro siempre y cuando las velocidades no cambien dramáticamente durante el periodo de falla. Para la máquina de 2400 hp la máxima diferencia de la velocidad que se da entre la velocidad de prefalla y la función de velocidad durante el estado estable es del 3 %, mientras que en el caso de la máquina de 1 hp la diferencia es del 3,6 %. Es entonces como se puede concluir que la velocidad de prefalla sirve como parámetro para simular las corrientes durante un cortocircuito monofásico sin que se generen diferencias importantes en las formas de onda; este comportamiento de las corrientes instantáneas se puede observar en la Figura **2-13**.



(a) Máquina de 2400 hp.

(b) Máquina de 1 hp.

Figura 2-12.: Velocidades de las máquinas durante una falla monofásica.

En la Tabla **2-3** están tabulados los errores encontrados en las corrientes instantáneas de fase para las 5 máquinas, las cuales fueron calculadas con los dos enfoques cuando sistemas de alimentación simétricos y asimétricos se encuentran suministrando energía eléctrica en la máquina de inducción.

Si observamos el comportamientos de las corrientes cuando el sistema de alimentación es balanceado, podemos encontrar que el error máximo para el Cálculo 1 se encuentra en la máquina de 2400 hp en la fase B con un error del $15,06$ %, mientras que con el Cálculo 2, el error máximo lo evidencia la misma máquina pero esta vez en la fase A con un valor del $4,11$

%. El promedio de los errores para las fases A, B y C con el Cálculo 1 son del $3,96$ %, $8,3$ % y $3,3$ % respectivamente, mientras que con el Cálculo 2 podemos encontrar errores del $1,22$ %, $0,56$ % y $1,4$ %, lo cual implica que existe mayor cercanía del modelo propuesto en esta tesis respecto a la dinámica de la máquina en comparación con el modelo propuesto en [21].

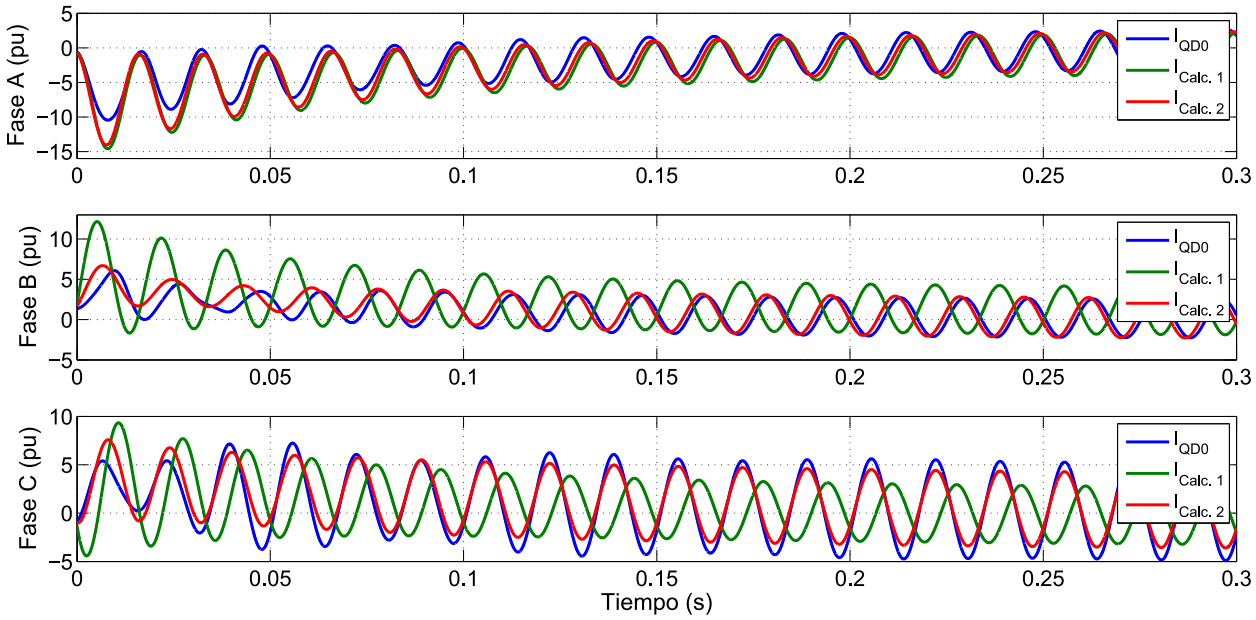
Para el caso del sistema de alimentación desbalanceado los errores que se producen respecto a la señal parámetro aumentan significativamente para ambos enfoques. Aunque el Cálculo 2 presenta menor error respecto al Cálculo 1, aún así se pueden encontrar errores grandes que se traducen en formas de onda de corriente muy distintas respecto a la señal obtenida con el marco de referencia QD0. Esto implica que ninguno de los dos enfoques es confiable para analizar fallas monofásicas cuando la máquina se alimenta con fuentes desbalanceadas.

Para ambos enfoques es común encontrar que la fase que presenta los valores más bajos de los errores es la fase que se encuentra bajo falla, y aunque las metodologías disminuyen el esfuerzo para calcular la dinámicas de las corrientes de falla, la exactitud se ve un poco afectada cuando el cambio de la velocidad en los primeros instantes es muy fuerte. Sin embargo, estas continúan brindando información aproximada sobre el comportamiento de la corriente de corto durante una falla monofásica.

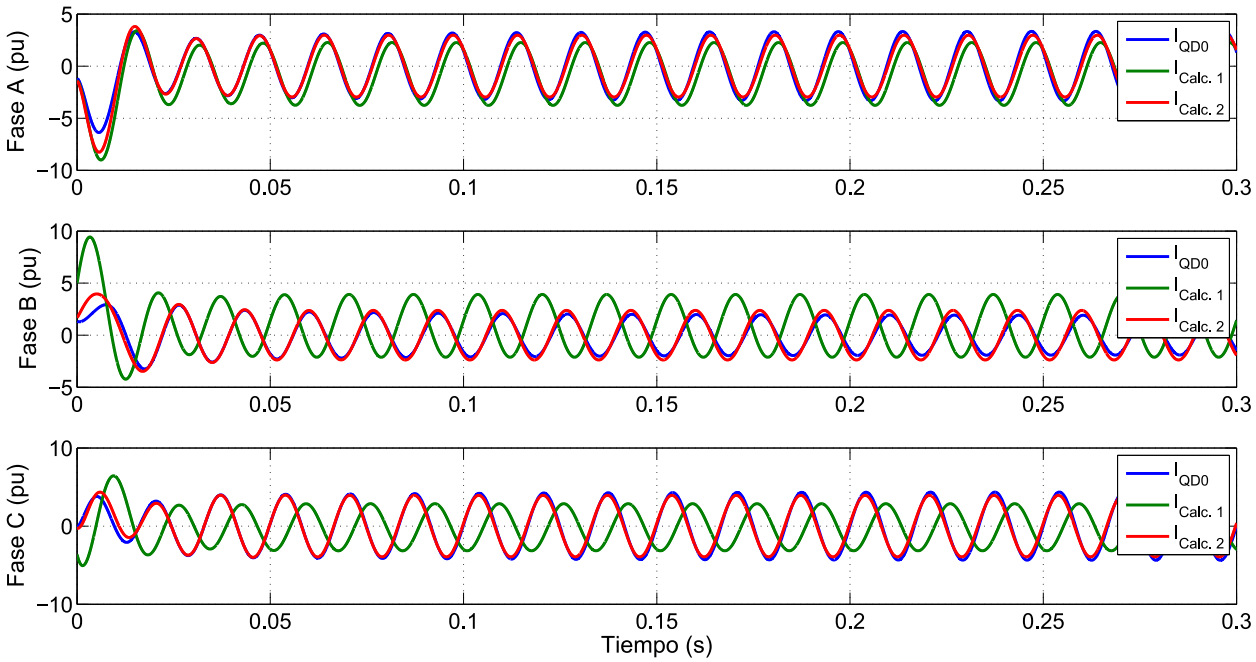
El cambio de la velocidad en fallas monofásicas cuando la máquina encuentra un nuevo punto de operación no es muy grande, en consecuencia las corrientes encontradas con el Cálculo 2 son bastante cercanas a la señal parámetro, y como el Cálculo 1 utiliza la misma suposición de la velocidad pero cambia en su expresión de estado estable, la forma de onda que genera cambia significativamente, aumentando así el error del método.

Tabla 2-3.: Error cuadrático medio. Falla monofásica.

Máquinas	*Fuente Balanceada*						*Fuente Desbalanceada*					
	Cálculo. 1			*Cálculo. 2*			*Cálculo. 1*			*Cálculo. 2*		
	Fase A	*Fase B*	*Fase C*	*Fase A*	*Fase B*	*Fase C*	*Fase A*	*Fase B*	*Fase C*	*Fase A*	*Fase B*	*Fase C*
1 hp	4,08 %	8,28 %	2,53 %	0,27 %	0,29 %	0,27 %	6,50 %	3,24 %	4,37 %	0,33 %	0,15 %	0,12 %
10 hp	2,5 %	5,74 %	4,02 %	0,76 %	0,77 %	1,9 %	37,23 %	9,07 %	13,78 %	2,31 %	0,29 %	2,42 %
20 hp	3,12 %	7,72 %	3,95 %	0,67 %	0,46 %	1,49 %	29,04 %	11,36 %	8.97 %	2,22 %	0,29 %	1,56 %
500 hp	1,65 %	4,68 %	2,11 %	0,32 %	0,16 %	0,46 %	31,53 %	70,08 %	108,59 %	0,42 %	66,93 %	68,09 %
2400 hp	8,44 %	15,06 %	4,05 %	4,11 %	1,12 %	2,76 %	165,33 %	24,81 %	271,15 %	15,21 %	66,18 %	79,99 %



(a) Máquina de 2400 hp.



(b) Máquina de 1 hp.

Figura 2-13.: Corrientes instantáneas por fase durante un cortocircuito monofásico.

Fallas bifásicas

Cuando ocurre una falla bifásica en los terminales de la máquina de inducción, la fase no fallada es la que suministra el campo magnético; esto genera que se llegue a un nuevo punto de operación de estado estable pero bajo un suministro asimétrico de las tensiones de alimentación.

Este vector de campo magnético produce un vector espacial de corriente, el cual se encuentra ilustrado en la Figura **2-14**. En esta simulación los vectores son calculados con las ecuaciones (2-45) y (2-51) en los 5 casos mencionados anteriormente. El vector espacial de corriente de cortocircuito presenta un comportamiento muy similar al caso monofásico, ya que la máquina permanece magnetizada debido a la conexión de la fase no fallada, y por lo tanto también se encuentra presente la componente de estado estable en el cálculo de las corrientes.

Las similitudes con el caso monofásico son enumeradas a continuación:

1. La parte real del vector espacial es diferente para ambos enfoques en donde se encuentran cambios en la magnitud y desfase, lo que genera cambios en la forma de onda del vector espacial de corriente.

2. Cuando se observa la parte imaginaria para ambos enfoques, la forma de onda cambia únicamente en algunos valores pico de las señales, sin embargo estos cambios son muy pequeños y no afectan significativamente la magnitud del vector espacial.

3. La función del ángulo del vector también presenta los mayores aportes de los armónicos 0,1,2,3,4 y 5.

4. La componente DC de la transformada de Fourier de la función de magnitud tiene el mayor aporte entre todo el espectro debido a que es un análisis del valor absoluto del vector.

5. El vector espacial de corriente difiere principalmente en la componente de estado estable. El Cálculo 1 es quien brinda una magnitud mayor para dicha componente en comparación con el Cálculo 2 en todas las máquinas estudiadas.

6. No existen componentes de alta frecuencia durante el transitorio provocado por el cortocircuito.

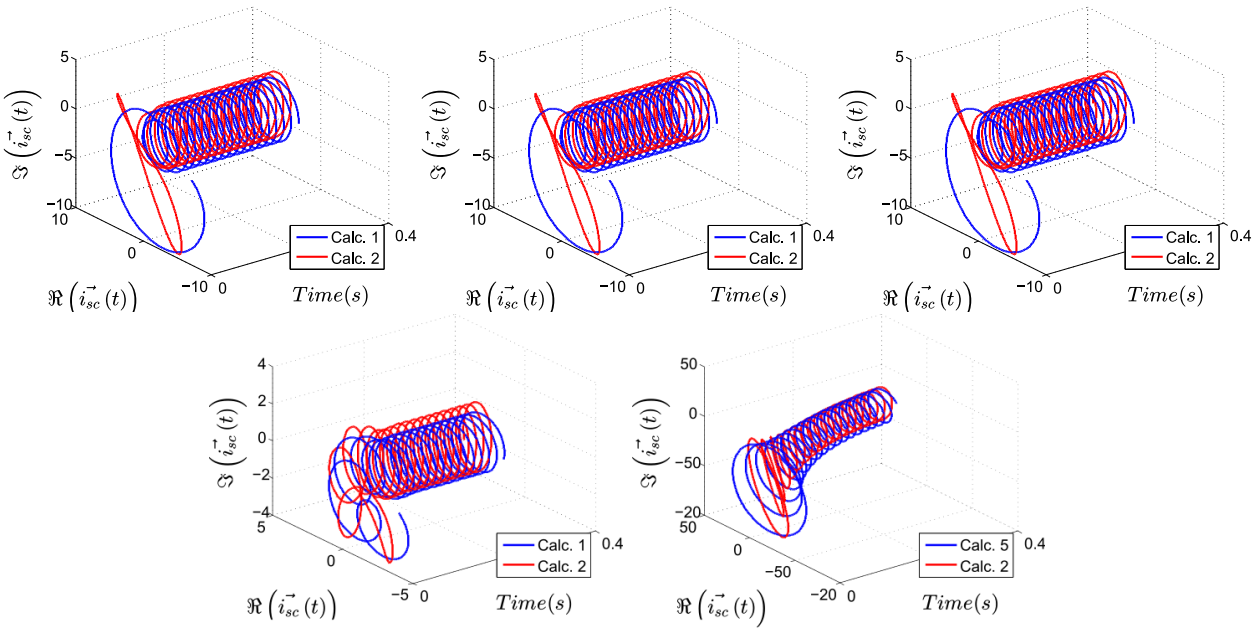
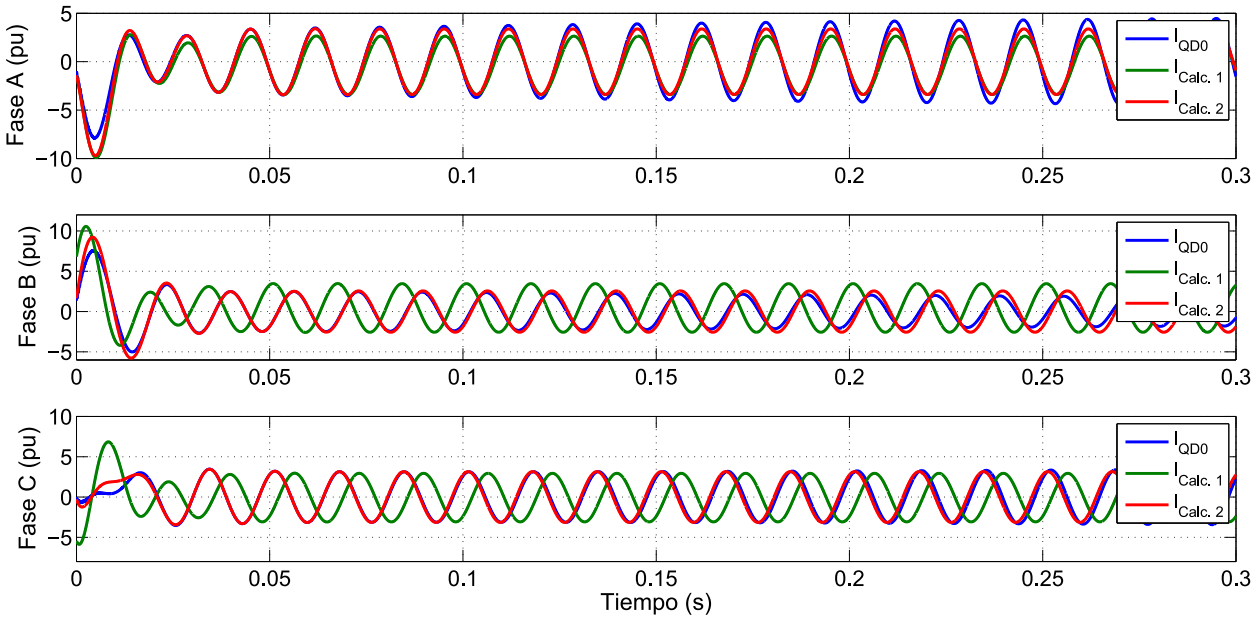


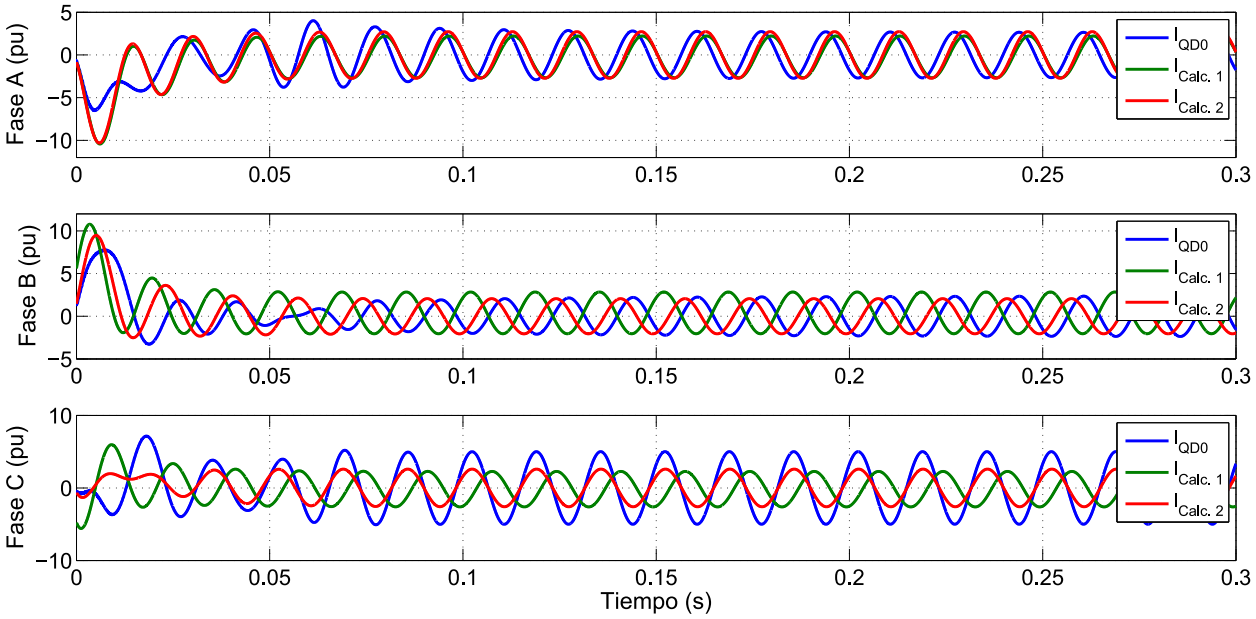
Figura 2-14.: Corriente espacial de cortocircuito en el tiempo. Falla bifásica.

La función de magnitud es muy similar para ambos enfoques, sin embargo en este caso no se presenta una componente de doble frecuencia debido a que la magnetización de la máquina está a cargo de una fase cuya magnitud opera bajo la componente fundamental de frecuencia.

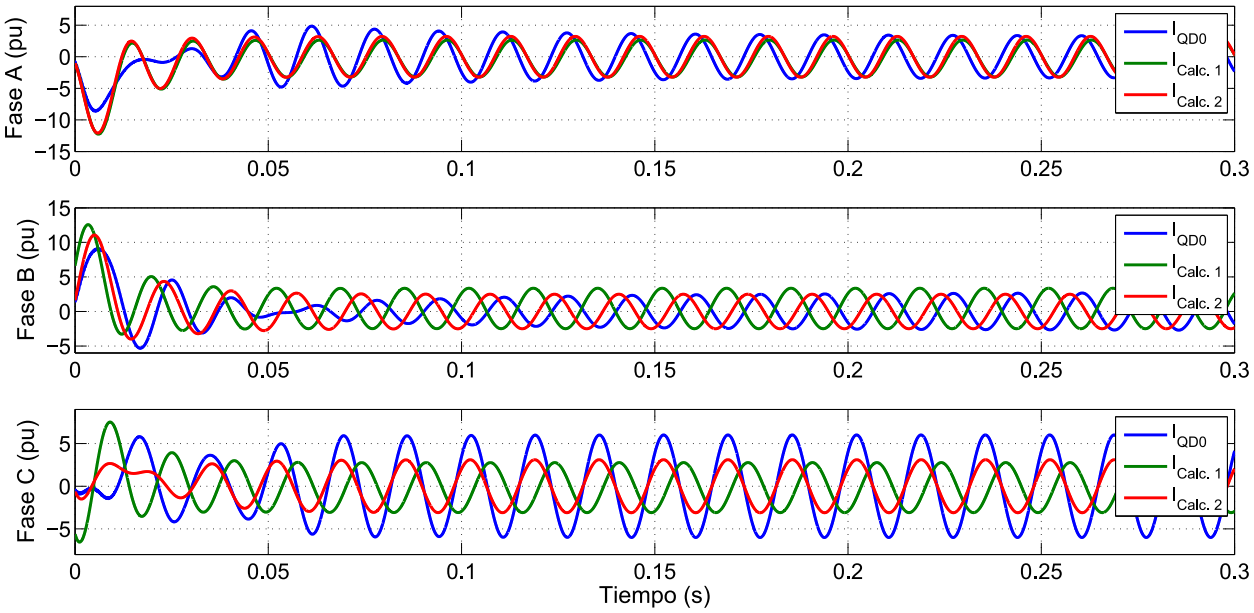
Las corrientes instantáneas obtenidas al realizar la conversión del vector espacial muestran ciertas diferencias en las formas de ondas de las corrientes de fase. Ya se menciono anteriormente que el vector calculado con la Ecuación 2-45 es más cercana a la señal parámetro obtenida con el marco de referencia QD0 que la señal obtenida con la Ecuación 2-51, sin embargo para las fallas bifásicas existen diferencias importantes que se pueden observar en la Figura **2-15**. En esta figura es posible determinar que las corrientes instantáneas empiezan a separarse de la señal parámetro de forma importante tanto en la parte transitoria como en la parte de estado estable. Durante los primeros instantes del corto aparecen dinámicas complejas que están definidas por los cambios iniciales en la velocidad de posfalla lo cual genera que se obtengan pequeños desfases entre las señales debido a que éstas están calculadas con la velocidad de prefalla. Cuando la corriente alcanza el estado estable los enfoques se alejan en gran medida de la señal parámetro porque en estos instantes la velocidad de la máquina es muy grande, incluso puede alcanzar dos veces la velocidad de prefalla. Esto genera que las corrientes de cortocircuito incrementen de forma significativa en las fases no falladas, mientras que en las fases cortocircuitadas la diferencia en la magnitud es menos pronunciada debido a la diferencia en los desfases impuestos por las dinámicas complejas de la corriente.



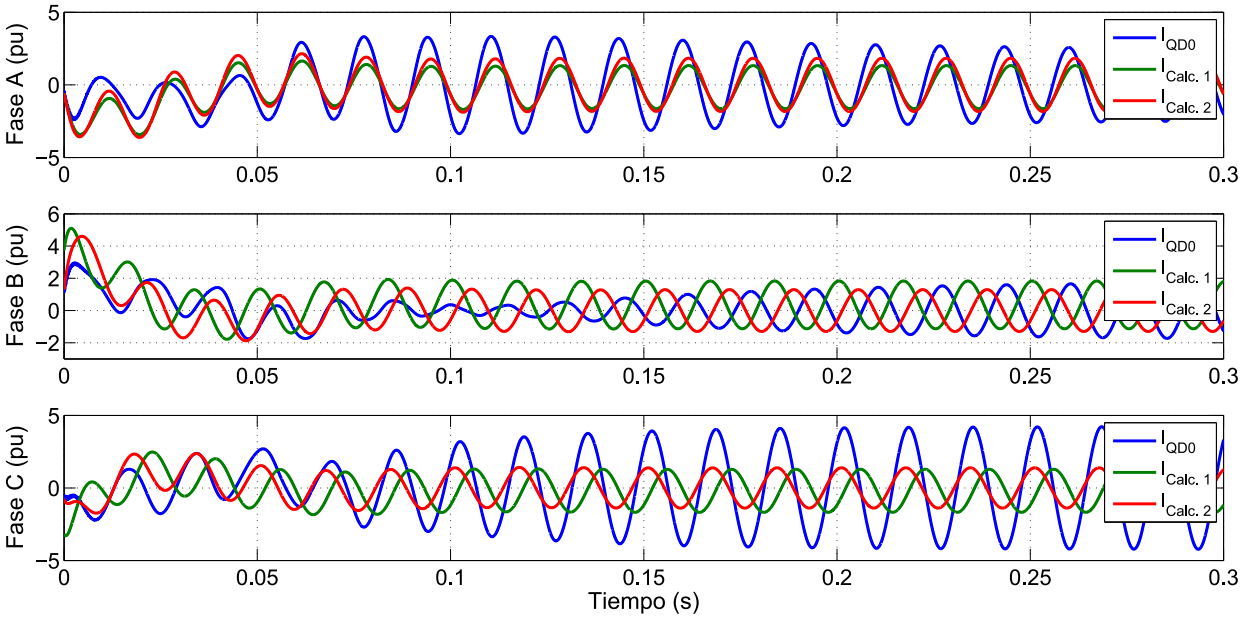
(a) Máquina de 1 hp.



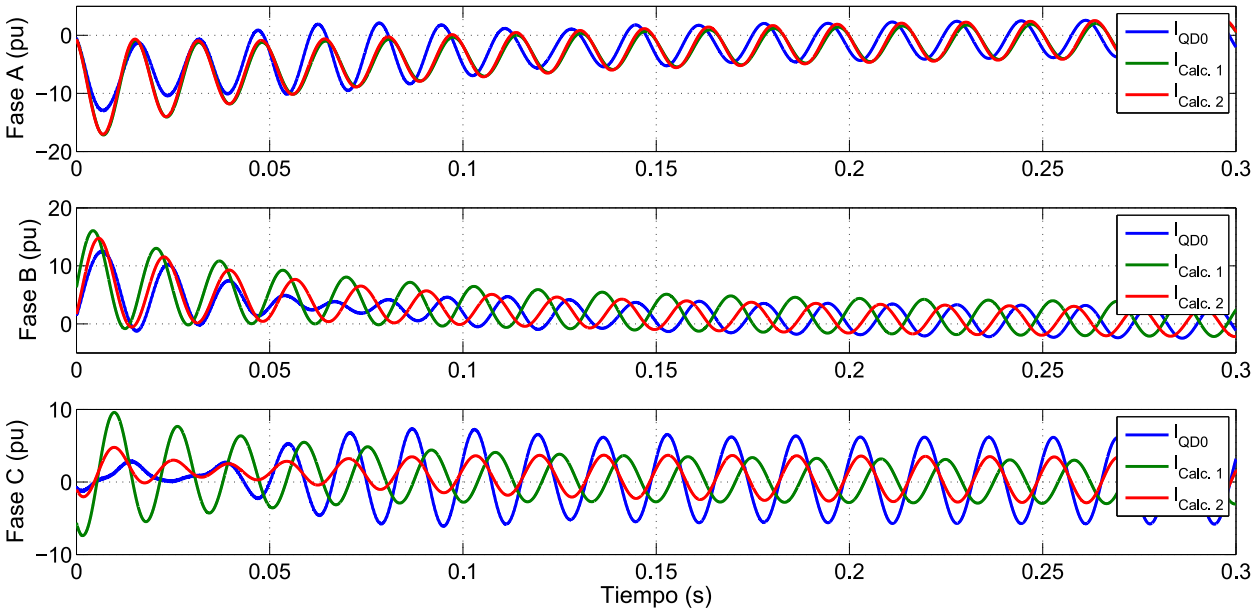
(b) Máquina de 10 hp.



(c) Máquina de 20 hp.



(d) Máquina de 500 hp.



(e) Máquina de 2400 hp.

Figura 2-15.: Corrientes instantáneas de cortocircuito por fase. Falla bifásica.

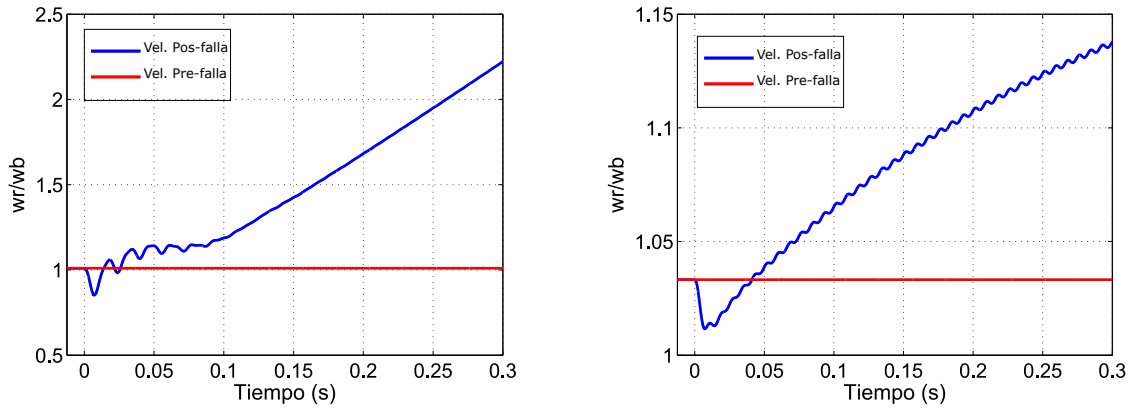
Al igual que en los casos anteriores el error se calculó con las corrientes de fase en el dominio de la frecuencia, esto permite identificar la cercanías de las forma de onda despreciando los desfases. El promedio de los errores encontrados para las corrientes de fase calculadas con la Ecuación 2-51 fueron 3,17 %, 7,9 % y 7,9 % para las fases A, B y C respectivamente, mientras que aquellos calculados con la Ecuación 2-45 fueron de 1,9 %, 1,3 % y 8,7 %. El mayor error se encuentra precisamente en la fase no fallada, es decir, aquella que suministra la magnetización en la máquina, que en este caso es la fase C, con un aumento en el error promedio respecto al caso monofásico de 4,6 % para el Cálculo 1, y para el Cálculo 2 es de 7,3 %. En este último método se evidencia un aumento grande debido a que en el caso monofásico el error promedio de la fase C era muy pequeño. Es entonces como el Cálculo 1 presenta un incremento menor en la diferencia del error promedio pese a que éste continua teniendo errores mayores.

Tabla 2-4.: Error cuadrático medio. Falla bifásica.

Máquinas	*Fuente Balanceada*						*Fuente Desbalanceada*					
	Cálculo 1			*Cálculo 2*			*Cálculo 1*			*Cálculo 2*		
	Fase A	*Fase B*	*Fase C*	*Fase A*	*Fase B*	*Fase C*	*Fase A*	*Fase B*	*Fase C*	*Fase A*	*Fase B*	*Fase C*
1 hp	2,42 %	3,25 %	2,08 %	0,59 %	0,59 %	0,27 %	2,12 %	3,95 %	1,62 %	0,13 %	1,11 %	0,57 %
10 hp	1,36 %	3,36 %	9,56 %	0,82 %	0,48 %	9,74 %	9,11 %	7,97 %	2,78 %	4,47 %	0,53 %	1,16 %
20 hp	1,95 %	6,66 %	13,08 %	1,00 %	1,02 %	12,39 %	6,98 %	9,68 %	4,13 %	3,84 %	0,63 %	2,49 %
500 hp	2,94 %	2,43 %	6,72 %	1,59 %	1,28 %	7,28 %	23,43 %	9,76 %	38,55 %	7,65 %	7,56 %	30,20 %
2400 hp	7,16 %	17,25 %	8,20 %	5,49 %	3,36 %	13,69 %	86,85 %	12,67 %	120,14 %	12,66 %	16,22 %	57,13 %

Lo que respecta a la fuente de alimentación desbalanceada se encuentra que el Cálculo 2 ofrece errores mucho menores que el Cálculo 1, y comparada con el caso monofásico también se encuentran errores más pequeños. El error máximo en las fases no falladas con el Cálculo 2 es de 16,22 % encontrado en la máquina de 2400 hp en la fase B. Este error aumenta debido a la forma de onda que se presenta en el intervalo de tiempo comprendido entre 0,055 s y 0,085 s aproximadamente. Aunque el error es significativo, aún así es aceptable para obtener un cálculo rápido de la corriente de cortocircuito. El método ya no cumple con su objetivo cuando se calcula la corriente de cortocircuito en la fase sana dado que la forma de onda se aleja bastante de la señal parámetro. Aún así el método es más exacto para calcular las corrientes de cortocircuito ante fuentes desbalanceadas en fallas bifásicas que en fallas monofásicas.

Los errores encontrados se deben principalmente al cambio de la velocidad ya que ésta aumenta significativamente cuando dos fases cortan el suministro de energía en la máquina. En la Figura **2-16** se puede observar el comportamiento de la velocidad posfalla comparada con la velocidad de prefalla para las máquinas de 1 hp y 2400 hp. La velocidad cuando $t = 300$ ms en la máquina de 1 hp es de 1,14 pu, mientras que en la máquina de 2400 hp es de 2,27 pu, es por esto que la máquina de 1 hp presenta errores menores en las corrientes de fase, comparados con aquellos obtenidos en la máquina de 2400 hp. Los cambios en la velocidad están asociados a la inercia de la máquina, es por esto que cuando se analizan máquinas de mayor potencia los errores tienden a incrementarse.



(a) Máquina de 2400 hp.

(b) Máquina de 1 hp.

Figura 2-16.: Velocidades de las máquinas durante una falla bifásica.

Análisis de resultados

Una de las conclusiones principales obtenidas en este capítulo es que el método de cálculo propuesto en esta tesis para obtener la corriente de cortocircuito por medio del vector es-

pacial dado en la Ecuación 2-45 es más exacto que aquel propuesto en [21] definido por la Ecuación 2-51. Esto se debe a la diferencia existente en la componente de estado estable, lo que se traduce en cambios de la parte real de los vectores y a su vez en las corrientes instantáneas de fase.

Debido a que la exactitud de las corrientes de cortocircuito calculadas con las dos metodologías dependen de la velocidad de prefalla, se encontró que para las fallas trifásicas la corriente no se ve afectada por el incremento de la velocidad debido a que la máquina está perdiendo magnetización y como la corriente tiende a cero su efecto es despreciable. Para las falla bifásicas se encontró que existe una diferencia importante en el cálculo de las corrientes de las fases no falladas debido a los grandes incrementos de las velocidades posfalla, las cuales están asociadas a las inercias de las diferentes máquinas y por lo tanto a la potencia de las mismas. Al perder conexión con la red se pierde carga que frena la máquina, pero como aún mantiene conexión la fase sana, entonces se evidencian cambios importantes en las corrientes instantáneas de las tres fases. Lo que respecta a las fallas monofásicas se encontró que las metodologías tienen un mayor grado de exactitud debido a que las diferencias entre las velocidades de prefalla y posfalla son pequeñas, aún así el método propuesto en esta tesis presenta mayor precisión.

También se puede concluir que el método es más exacto en el cálculo de las corrientes que se encuentran en las fases cortocircuitadas, ya que en las fases sanas el error es mayor.
Respecto a los análisis de los cortocircuitos cuando la máquina se encuentra conectada a una fuente desbalanceada ninguno de los dos métodos es lo suficientemente confiable. A pesar de que se pueden encontrar errores pequeños para algunas fases, en otras se obtienen diferencias muy grandes.

3. Modelo de la máquina de inducción en estado transitorio

En este capítulo se estudiará un modelo propuesto de la máquina de inducción en estado transitorio utilizando la solución de los flujos de la Ecuación 2-5 como insumo para definir una nueva función de la tensión transitoria. Gracias a esto se puede realizar una representación alternativa al modelo clásico de componentes simétricas determinado por la ecuación Ecuación 1-11, y a la metodología propuesta en [21] o modelo de Howard.

La propuesta para la expresión de la tensión transitoria está compuesta entonces por dos partes, la primera está conformada por una expresión para la fuente de tensión de secuencia positiva y otra para la fuente de secuencia negativa. La otra expresión propuesta para la tensión transitoria utiliza la misma solución de los flujos de la máquina, pero esta vez sólo incluye una fuente de tensión de secuencia positiva.
Se plantean dos modelos de la fuente de tensión debido a que se pretende mejorar la exactitud del modelo de Howard de dos fuentes, pero se propone utilizar el modelo de una fuente ya que puede brindar mayor exactitud que los modelos de dos fuentes.

Se presentará paso a paso el método para el cálculo de las tres fuentes de tensión y además se calcularán las corrientes de cortocircuito para cada fase de la máquina utilizando los diferentes modelos. Se utiliza como ejemplo la máquina de 2400 hp, ya que ésta fue la máquina utilizada para plantear el modelo de Howard, por lo tanto sirve como parámetro para observar el comportamiento de los métodos de cálculo.

Adicionalmente se presentan los resultados de las corrientes de cortocircuito tanto para fallas simétricas como para fallas asimétricas en diferentes máquinas, lo cual permite profundizar más en el desempeño de los métodos.

3.1. Deducción de los modelos circuitales

Para obtener el modelo de la tensión transitoria se asumirá entonces que el tiempo de falla es igual a cero $t_0 = 0\ s$; de esta manera el modelo circuital representa el comportamiento de la máquina durante los primeros instantes del cortocircuito para los diferentes tipos de fallas que se puedan presentar en los terminales de la máquina.

Se desea entonces encontrar una nueva expresión de tensión en redes de secuencia con notación de vector espacial basados en los vectores espaciales de flujo de la Ecuación 2-43. Debido a que es un análisis fasorial de estado transitorio se procede a definir la derivada en el tiempo como la velocidad angular síncrona, lo cual permite reescribir la Ecuación 2-1 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{v}_s &= R_s\vec{i}_s + j\omega_s\vec{\lambda}_s \\ \vec{v}_r &= R_r\vec{i}_r + j\left(\omega_s - \omega_r\right)\vec{\lambda}_r \ .\end{aligned} \tag{3-1}$$

Si se despeja el vector de flujo concatenado de la expresión de tensión en el estator se obtiene la siguiente expresión:

$$\vec{\lambda}_s = \frac{\vec{v}_s - R_s\vec{i}_s}{j\omega_s} \ . \tag{3-2}$$

Se procede a reemplazar la Ecuación 3-2 en la expresión de corriente del estator de la Ecuación 2-3 de donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{i}_s = \frac{\vec{\lambda}_s}{L'_s} - \frac{L_m}{L_r}\frac{\vec{\lambda}_r}{L'_s} = \frac{\vec{v}_s - R_s\vec{i}_s}{j\omega_s L'_s} - \frac{L_m\vec{\lambda}_r}{L_r L'_s} \ . \tag{3-3}$$

Esto permite agrupar los términos de la corriente del estator para luego proceder a realizar el despeje de la siguiente manera:

$$\vec{i}_s\left[1 + \frac{R_s}{X'}\right] = \frac{\vec{v}_s}{X'} - \frac{L_m\vec{\lambda}_r}{L_r L'_s} \tag{3-4}$$

$$\begin{aligned}\vec{i}_s &= \frac{\left[\dfrac{\vec{v}_s - jL_m/L_r\vec{\lambda}_r\omega_s}{X'}\right]}{\left[\dfrac{X' + R_s}{X'}\right]} \\ \vec{i}_s &= \frac{\vec{v}_s - \vec{v}'}{X' + R_s} \ ,\end{aligned} \tag{3-5}$$

donde $X' = j\omega_s L'_s$ es la reactancia transitoria, y $\vec{v}'$ es el modelo de la tensión transitoria en términos de vector espacial.
Dicha tensión se define entonces como:

$$\vec{v}' = j\omega_s\frac{L_m}{Lr}\vec{\lambda}_r \ . \tag{3-6}$$

Al reemplazar la expresión del flujo en el rotor de la Ecuación 2-43 en la expresión de tensión transitoria, Ecuación 3-6, se crea una dependencia de la función de los valores propios y

los vectores propios junto con las componentes de estado estable de secuencia positiva y secuencia negativa.

$$\vec{v}' = j\omega_s \frac{L_m}{Lr}\left[\frac{\left(\vec{\lambda}_{si} - p_2\vec{\lambda}_{ri}\right)}{p_1 - p_2}e^{\psi_1(t-t_0)} + \frac{\left(p_1\vec{\lambda}_{ri} - \vec{\lambda}_{si}\right)}{p_1 - p_2}e^{\psi_2(t-t_0)} + \vec{\Lambda}_{1r}e^{j\omega_s t} + \vec{\Lambda}_{2r}e^{-j\omega_s t}\right] . \quad (3\text{-}7)$$

Para realizar la definición de la tensión en los primeros instantes del corto vamos a decir que $t = t_0$, de tal forma que:

$$\vec{v}' = j\omega_s \frac{L_m}{Lr}\left[\frac{\left(\vec{\lambda}_{si} - p_2\vec{\lambda}_{ri}\right)}{p_1 - p_2} + \frac{\left(p_1\vec{\lambda}_{ri} - \vec{\lambda}_{si}\right)}{p_1 - p_2} + \vec{\Lambda}_{1r}e^{j\omega_s t_0} + \vec{\Lambda}_{2r}e^{-j\omega_s t_0}\right] . \quad (3\text{-}8)$$

En este punto se puede obtener la expresión propuesta para la tensión transitoria de la máquina con notación espacial al agrupar los términos semejantes de la ecuación anterior.

$$\vec{v}' = j\omega_s \frac{L_m}{Lr}\left[\vec{\lambda}_{ri} + \vec{\lambda}_{1r}e^{j\omega_s t_0} + \vec{\lambda}_{2r}e^{-j\omega_s t_0}\right] . \quad (3\text{-}9)$$

En el modelo de Howard de redes de secuencia se definen los modelos de tensiones de una forma diferente, en donde la componente DC del flujo del rotor se desprecia, ya que los sistemas de protección filtran dicha componente. Sin embargo como vimos en la Sección 1.1, la componente DC genera aumentos en la magnitud de la corriente durante el transitorio de la señal, es decir durante los primeros instantes de la falla, lo que puede generar cambios en los diseños de los equipos eléctricos. Adicionalmente en el modelo de Howard se plantean ecuaciones diferentes para fallas simétricas y para fallas asimétricas, lo que se traduce en un aumento del número de ecuaciones.
A continuación se definen las dos ecuaciones de la metodología de Howard.

- Fallas simétricas:
  Para esta fuente se desprecian las componente de estado estable de secuencia positiva y secuencia negativa, además de la componente DC. Las componentes de estado estable se desprecian debido a que la máquina pierde magnetización cuando se corta el suministro de energía en el estator, lo que conlleva a una dependencia de las condiciones iniciales de los flujos.

  $$\vec{v}' = j\omega_s \frac{L_m}{Lr}\left[\frac{p_1}{p_1 - p_2}\vec{\lambda}_r(t_0) - \vec{\lambda}_s(t_0)\right] . \quad (3\text{-}10)$$

- Fallas asimétricas:
  En este modelo se despreció la componente DC del vector espacial de flujo concatenado en el rotor y se reemplazó en la Ecuación 3-6, obteniendo así el siguiente resultado:

  $$\vec{v}' = j\omega_s \frac{L_m}{Lr}\left[\frac{p_1\vec{\lambda}_{ri} - \vec{\lambda}_{si}}{p_1 - p_2} + \vec{\Lambda}_{1r}e^{j\omega_s t_0} + \vec{\Lambda}_{2r}e^{-j\omega_s t_0}\right] . \quad (3\text{-}11)$$

Es necesario convertir la Ecuación 3-9 y la Ecuación 3-11[1], escritas en notación espacial, en sus equivalencias fasoriales para que de esta forma sean comparables con el modelo clásico presentado en la Ecuación 1-11. Es de esta manera como se obtiene la información necesaria de las corrientes de fase y no de la corriente espacial de cortocircuito.

Para cumplir con este objetivo es necesario determinar las equivalencias entre los vectores espaciales y los fasores temporales. Las expresiones de los vectores espaciales de secuencia positiva y secuencia cero son iguales comparadas con las expresiones de los fasores de las mismas secuencias, mientras que el fasor de secuencia negativa difiere del vector espacial, ya que su equivalencia está dada en términos de menos el conjugado del vector espacial, así[2]:

$$V_0 = \vec{V}_0 \tag{3-12}$$

$$V_1 = \vec{V}_1 \tag{3-13}$$

$$V_2 = -\frac{\vec{V}_2^*}{\sqrt{2}} \, . \tag{3-14}$$

Con las definiciones anteriores es posible encontrar expresiones para los fasores de los flujos concatenados en el rotor y en el estator. Vamos a empezar entonces por escribir las equivalencias de los flujos de estado estable de secuencia positiva y secuencia negativa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_{1r} &= \Lambda_a^{a+} \\ \vec{\lambda}_{2r} &= -\Lambda_a^{a-*} \\ \vec{\lambda}_{1s} &= \Lambda_A^{a+} \\ \vec{\lambda}_{2s} &= -\Lambda_A^{a-*} \, , \end{aligned} \tag{3-15}$$

donde el símbolo $*$ hace referencia al conjugado del flujo.
Ahora bien se procede a definir los fasores de los flujos de las condiciones iniciales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_s(t_0) &= \Lambda_A^b \\ \vec{\lambda}_r(t_0) &= \Lambda_a^b \, . \end{aligned} \tag{3-16}$$

Donde
Λ_A^{a+} : Fasor del flujo concatenado de secuencia positiva en estado estable de la fase A del estator,
Λ_a^{a+} : Fasor del flujo concatenado de secuencia positiva en estado estable de la fase a del rotor,

[1] Sólo se utiliza la ecuación para fallas asimétricas ya que la Ecuación 3-10 posee sólo algunas variables del flujo.
[2] La raíz de dos se utiliza dependiendo del valor pico o el valor rms del fasor.

Λ_A^{a-} : Fasor del flujo concatenado de secuencia negativa en estado estable de la fase A del estator,
Λ_a^{a-} : Fasor del flujo concatenado de secuencia negativa en estado estable de la fase a del rotor,
Λ_A^b : Fasor del flujo concatenado de prefalla de la fase A del estator,
Λ_a^b : Fasor del flujo concatenado de prefalla de la fase a del rotor.
Luego de haber realizado las definiciones anteriores, se procede a reemplazar las cantidades fasoriales equivalentes en la Ecuación 2-42 para poder reescribirla de la siguiente manera, y así obtener la primera parte de la ecuación final:

$$\Lambda_{ri} = \Lambda_a^b - \Lambda_a^{a+} e^{j\omega_s t_0} + \Lambda_a^{a-*} e^{-j\omega_s t_0} \tag{3-17}$$
$$\Lambda_{si} = \Lambda_A^b - \Lambda_A^{a+} e^{j\omega_s t_0} + \Lambda_A^{a-*} e^{-j\omega_s t_0} \ . \tag{3-18}$$

Los fasores de los flujos pueden ser calculados por medio de las inductancias de la máquina y de las corrientes de prefalla y de posfalla.
Los flujos de prefalla pueden ser calculados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Lambda_A^b &= L_s I_A^b + L_m I_a^b \\ \Lambda_a^b &= L_m I_A^b + L_r I_a^b \ . \end{aligned} \tag{3-19}$$

De forma análoga se procede a calcular los flujos de posfalla de la máquina con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Lambda_A^{a+} &= L_s I_A^{a+} + L_m I_a^{a+} \\ \Lambda_a^{a+} &= L_m I_A^{a+} + L_r I_a^{a+} \\ \Lambda_A^{a-} &= L_s I_A^{a-} + L_m I_a^{a-} \\ \Lambda_a^{a-} &= L_m I_A^{a-} + L_r I_a^{a-} \ , \end{aligned} \tag{3-20}$$

donde:
I_A^{a+} : Fasor de la corriente de secuencia positiva en estado estable de la fase A del estator,
I_a^{a+} : Fasor de la corriente de secuencia positiva en estado estable de la fase a del rotor,
I_A^{a-} : Fasor de la corriente de secuencia negativa en estado estable de la fase A del estator,
I_a^{a-} : Fasor de la corriente de secuencia negativa en estado estable de la fase a del rotor,
I_A^b : Fasor de la corriente de prefalla de la fase A del estator,
I_a^b : Fasor de la corriente de prefalla de la fase a del rotor.
Los subíndices A y a, representan la fase A del estator y del rotor respectivamente, mientras que los superíndices $a+, a-$ y b representan las componentes de estado estable de secuencia positiva, de secuencia negativa y el estado de prefalla respectivamente.

Ya calculados todos los flujos necesarios es posible definir los modelos propuestos de las fuentes de tensión para la red de secuencia positiva y para la red de secuencia negativa al

reemplazar dichos flujos en la expresión de tensión transitoria de la Ecuación 3-9.

Para obtener el modelo con dos fuentes de tensión es necesario separar las componentes de secuencia positiva y negativa de los flujos, en dos ecuaciones de tensión que representen las mismas componentes así:

$$\vec{v}_1' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[\vec{\lambda}_{ri} + \vec{\lambda}_{1r} e^{j\omega_s t_0} \right] \tag{3-21}$$

$$\vec{v}_2' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[\vec{\lambda}_{2r} e^{-j\omega_s t_0} \right] \ , \tag{3-22}$$

luego se procede a realizar la equivalencia en notación fasorial como sigue:

$$V_1' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[\Lambda_a^b - \Lambda_a^{a+} e^{j\omega_s t_0} + \Lambda_a^{a-*} e^{-j\omega_s t_0} + \Lambda_a^{a+} e^{j\omega_s t_0} \right] \tag{3-23}$$

$$V_2' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[-\Lambda_a^{a-*} e^{-j\omega_s t_0} \right] \ , \tag{3-24}$$

Como $t_0 = 0\ s$, entonces las funciones exponenciales se transforman en 1, y al simplificar la ecuación se obtiene la primera expresión propuesta que incluye dos fuentes de tensión transitoria para el modelo de la máquina, la cual está dada por:

$$V_1' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[\Lambda_a^b + \Lambda_a^{a-*} \right] \tag{3-25}$$

$$V_2' = -j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[\Lambda_a^{a-*} \right] \ . \tag{3-26}$$

La segunda expresión propuesta está definida como una única ecuación para la fuente de secuencia positiva, y ésta se obtiene al reemplazar todos los términos en la misma ecuación, y no al realizar la separación en secuencias de la Ecuación 3-9.
El modelo de una fuente transitoria de tensión es entonces:

$$\vec{v}' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[\vec{\lambda}_{ri} + \vec{\lambda}_{1r} e^{j\omega_s t_0} + \vec{\lambda}_{2r} e^{-j\omega_s t_0} \right] \tag{3-27}$$

$$V' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[\Lambda_a^b - \Lambda_a^{a+} + \Lambda_a^{a-*} + \Lambda_a^{a+} - \Lambda_a^{a-*} \right]$$

$$V' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r} \left[\Lambda_a^b \right] \tag{3-28}$$

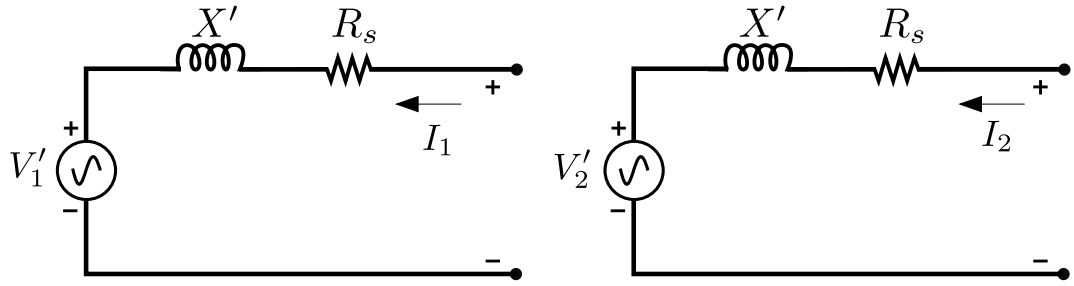
En el modelo de la máquina de inducción propuesto por Howard, las expresiones de las fuentes de tensión son más complejas debido a la omisión de la componente DC en los flujos del rotor. En consecuencia aumenta el número de parámetros necesarios para la obtención del valor de la tensión, y de igual forma que en la metodología propuesta de las dos fuentes, primero se separan las secuencias de los flujos en sus respectivas ecuaciones de tensión y

luego se reemplazan los fasores de los flujos en cada expresión. Es de esta forma como se define la metodología de Howard con las siguientes ecuaciones para el cálculo de la tensión transitoria con notación fasorial:

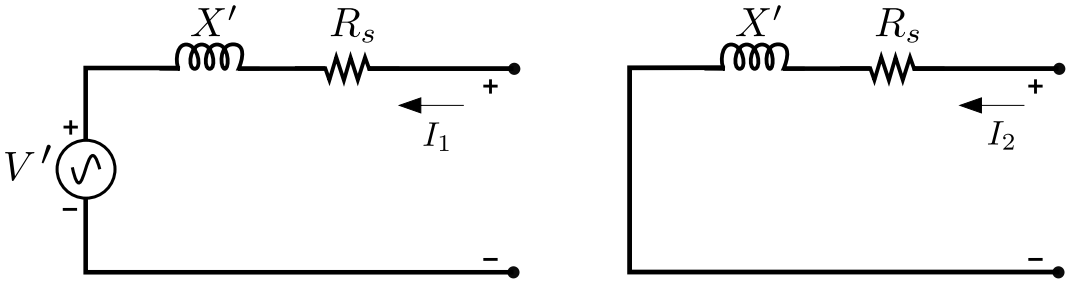
$$V_1'(\delta) = j\omega_s \frac{L_m}{L_r}\left[\frac{p_1\left(\Lambda_a^b - \Lambda_a^{a+} + \Lambda_a^{a-*}e^{-j2\delta}\right)}{(p_1 - p_2)} - \frac{\left(\Lambda_A^b - \Lambda_A^{a+} + \Lambda_A^{a-*}e^{-j2\delta}\right)}{(p_1 - p_2)} + \Lambda_a^{a+}\right] \tag{3-29}$$

$$\vec{V_2'} = j\omega_s \frac{L_m}{L_r}\Lambda_a^{a-}\ , \tag{3-30}$$

donde $\delta = \omega_s t_0$ se define como el ángulo de falla.
Finalmente para completar el modelo de la máquina es necesario definir la impedancia transitoria. Tanto las metodologías propuestas como la metodología de Howard y la clásica tienen el mismo modelo de impedancia transitoria, el cual está definido por una inductancia transitoria Ecuación 2-4, y una resistencia que representa las pérdidas en el conductor del devanado del estator. Aunque la resistencia del estator puede ser despreciada, en este caso se utiliza para obtener un modelo de la máquina más preciso durante el periodo transitorio. Las ecuaciones (3-26) y (3-30) presentan el mismo modelo circuital ilustrado en la Figura 3.1(a), mientras que la Ecuación 3-28 y la Ecuación 1-11 presentan el mismo modelo circuital ilustrado en la Figura 3.1(b), la diferencia en todos los casos radica en el cálculo de las tensiones transitorias.



(a) Modelo con dos fuentes de tensión.



(b) Modelo con una fuente de tensión.

Figura 3-1.: Modelos circuitales de la máquina de inducción en estado transitorio.

No existe un modelo de secuencia cero de la máquina de inducción para el estudio de fallas dado que se asume una conexión en Y para los devanados del estator, y además se asume que el neutro de la Y no posee una conexión con tierra que le permita a la corriente de secuencia cero fluir por ella. En consecuencia sólo aparece la impedancia equivalente de secuencia cero de la red pero no de la máquina. En el Apéndice B se encuentran ilustrados los diferentes tipos de topologías de la máquina de inducción que se pueden presentar durante fallas simétricas y asimétricas, para las metodologías de dos fuentes y de una fuente.

3.2. Cálculo de las tensiones transitorias y corrientes de cortocircuito

A continuación se desarrollará un ejemplo para el cálculo de las corrientes de cortocircuito utilizando el método de las componentes simétricas con los tres modelos de tensión transitoria definidos por la Ecuación 3-26, la Ecuación 3-28 y la Ecuación 3-30. Se desarrolla el ejemplo con el fin de ilustrar el procedimiento requerido para obtener el valor de las tensiones transitorias, y como paso siguiente obtener las corrientes de cortocircuito con los diferentes modelos.

El ejemplo se basa en un generador de inducción de 2400 hp cuando una falla monofásica es aplicada en sus terminales. La forma de realizar el cálculo de los flujos definidos en la Ecuación 3-19 y en la Ecuación 3-20 se realiza por medio de la solución del circuito de prefalla de estado estable, y del circuito equivalente de estado estable bajo la falla en cuestión.

Se procede entonces a realizar el cálculo del valor de las fuentes de tensión, y para ello es necesario primero que todo hallar las corrientes de estado estable de prefalla tanto en el rotor como en el estator. Para ello se emplea el circuito de la máquina ilustrado en la Figura **3-2**. Como la resistencia efectiva de la máquina depende del deslizamiento, entonces se toma el deslizamiento de prefalla que en este caso es de -0.01.

Se procede a realizar la solución del circuito por medio de la ley de tensiones de Kirchhoff para determinar las corrientes I_a^b e I_A^b.

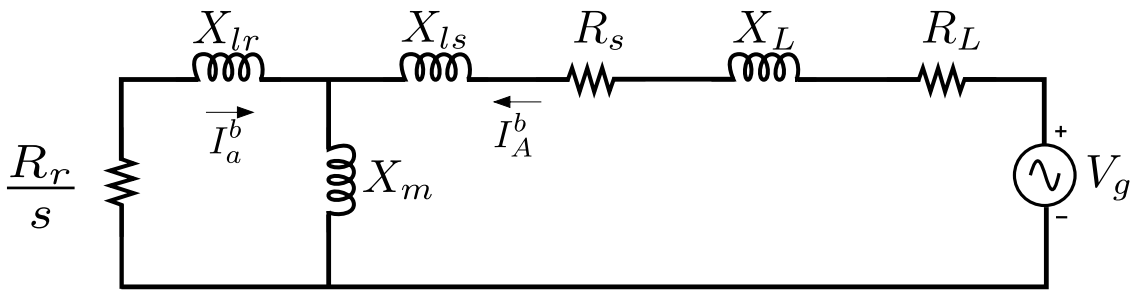


Figura 3-2.: Circuito de estado estable de la máquina de inducción conectado a un equivalente de red.

Ya encontradas las corrientes se procede a obtener los flujos de prefalla en el rotor y en el estator por medio de la Ecuación 3-19. Los resultados de estas 4 variables se pueden observar en la Tabla **3-1**.

Tabla 3-1.: Valores de prefalla

I_a^b	I_A^b	Λ_a^b	Λ_A^b
$1600,8 + 244,86j\ A$	$-1564,9 - 676,26j\ A$	$0,1348 - 0,8816j\ Wb$	$0,0023 - 0,9219j\ Wb$

El paso a seguir es encontrar los valores de las corrientes que fluyen por la máquina durante la operación de estado estable en la falla monofásica. Estas se calculan por medio del circuito ilustrado en la Figura **3-3**, en donde las redes de secuencia de la máquina explicada en la Sección 1.2.1 se conectan en serie. El circuito genera un sistema de tres mallas con tres corrientes de malla respectivamente, para lo cual es necesario plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V_g = (Z_L + Z_p)\, I_I - ZpI_{II} \tag{3-31}$$

$$0 = -Z_p I_I + (2Z_L + Z_p)\, I_{II} - Z_L I_{III} \tag{3-32}$$

$$0 = -Z_L I_{II} + (Z_L + Z_n)\, I_{III}\ , \tag{3-33}$$

donde:
V_g es la tensión del equivalente de red,
I_I, I_{II}, I_{III} son las corrientes de las mallas 1,2 y 3 respectivamente,
Z_L es la impedancia equivalente de la red,
Z_p, Z_n son las impedancias equivalentes de secuencia positiva y secuencia negativa de la máquina en estado estable

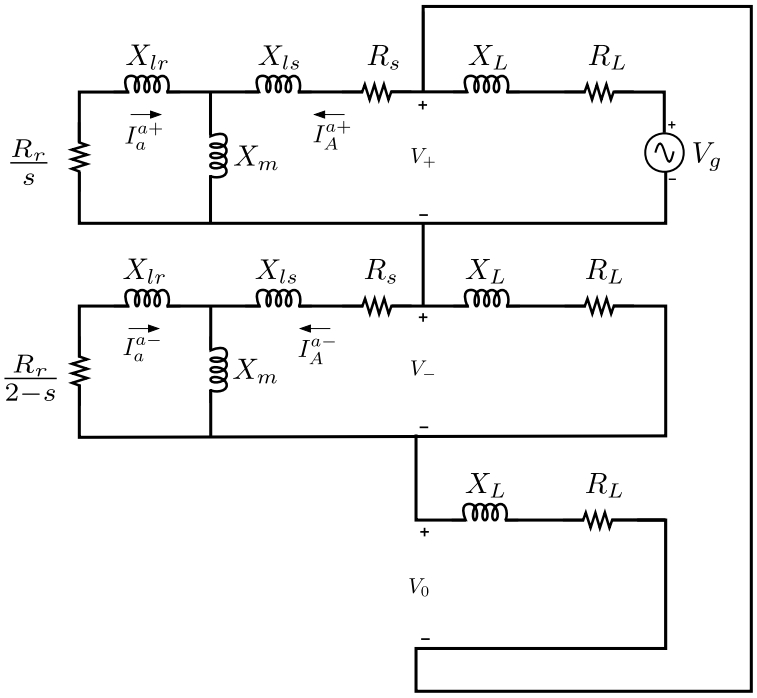


Figura 3-3.: Diagrama circuital de la máquina de inducción en estado estable durante un cortocircuito monofásico.

Al encontrar las corrientes de las mallas I, II y III, es posible obtener las corrientes que fluyen por la red de secuencia positiva y por la red de secuencia negativa por medio de las siguientes igualdades:

$$I_1 = I_I - I_{II} \tag{3-34}$$

$$I_2 = -I_{III} \ , \tag{3-35}$$

donde I_1, I_2 son las corrientes fasoriales de secuencia positiva y secuencia negativa respectivamente. La corriente de secuencia positiva es la misma corriente que fluye por el estator en la red de secuencia positiva, análogamente la corriente de secuencia negativa es la misma corriente que fluye por el estator en secuencia negativa. Para hallar las corrientes que fluyen por el rotor, simplemente se procede a realizar un divisor de corriente en las redes de secuencia de forma independiente, de tal forma que:

$$I_A^{a+} = I_1 \tag{3-36}$$

$$I_A^{a-} = I_2 \tag{3-37}$$

$$I_a^{a+} = -I_1 \frac{Z_m}{Z_m + Z_{r1}} \tag{3-38}$$

$$I_a^{a-} = -I_2 \frac{Z_m}{Z_m + Z_{r2}} \ , \tag{3-39}$$

donde:

$$Z_{r1} = \frac{R_r}{s} + jX_{lr}$$

$$Z_{r2} = \frac{R_r}{2-s} + jX_{lr}\ .$$

Con el cálculo de estas corrientes es posible determinar los valores de los flujos de posfalla por medio de la Ecuación 3-20. Los resultados de los cálculos tanto de las corrientes como de los flujos se encuentran tabulados en la Tabla **3-2**.

Tabla 3-2.: Valores de las corrientes y flujos de estado estable.

I_A^{a+}	I_A^{a-}	I_a^{a+}	I_a^{a-}
$-1042,4 - 450,13j\ A$	$-208,17 + 3655,8j\ A$	$1066,2 + 162,78j\ A$	$208,92 - 3589,6j\ A$

Λ_A^{a+}	Λ_A^{a-}	Λ_a^{a+}	Λ_a^{a-}
$0{,}0014 - 0{,}6140j\ Wb$	$-0{,}0080 + 0{,}3045j\ Wb$	$0{,}0897 - 0{,}5872j\ Wb$	$0{,}0095 + 0{,}0006j\ Wb$

Ya calculados todos los parámetros se procede entonces a realizar el cálculo de las ecuaciones de tensión transitoria utilizando la Ecuación 3-26 o enfoque propuesto de dos fuentes, la Ecuación 3-28 o enfoque propuesto de una fuente y la Ecuación 3-30 o enfoque de Howard:

- Cálculo del enfoque propuesto de dos fuentes.
  - Secuencia positiva:

    $$V_1' = j\omega_s \frac{L_m}{Lr}\left[\Lambda_a^b + \Lambda_a^{a-*}\right]$$

    $$V_1' = (377j)\,\frac{0{,}0021}{0{,}0021}\left[0{,}1348 - 0{,}8816j + 0{,}0095 - 0{,}0006j\right] = 326,57 + 53,424j\ V$$

    $$V_1' = 0{,}9552\angle 9{,}3^\circ\ pu$$

  - Secuencia negativa:

    $$V_2' = -j\omega_s \frac{L_m}{Lr}\left[\Lambda_a^{a-*}\right] = (-377j)\,\frac{0{,}0021}{0{,}0021}(0{,}0095 - 0{,}0006i)$$

    $$V_2' == -0{,}2042 - 3{,}5079j\ V = 0{,}0101\angle -93{,}3^\circ\ pu$$

- Cálculo con el enfoque propuesto de una fuente: Ésta depende del valor del flujo de prefalla de rotor.

  $$V' = j\omega_s \frac{L_m}{Lr}\left(\Lambda_a^b\right)$$

  $$V' = (377j)\,\frac{0{,}0021}{0{,}0021}\,(0{,}1348 - 0{,}8816j)$$

  $$V' = 326,36 + 49,916j\ V = 0{,}9531\angle 8{,}6958^\circ\ pu$$

- Cálculo con el enfoque de Howard: Aunque la definición de esta ecuación está dada en términos del ángulo de falla, dicho ángulo se vuelve cero debido a que el tiempo de falla es igual a $t_0 = 0\ s$. Para este enfoque es necesario conocer el valor de los vectores propios y por lo tanto de los valores propios, además es importante recordar que $K = 1/(p_1 - p_2)$. Los datos de estos parámetros se pueden observar en la Tabla **3-3**.

Tabla 3-3.: Valores propios y vectores propios de la máquina.

ψ_1	ψ_2	p_1	p_2
$-9,5992 + 0,5864j$	$-24,17 + 380,04j$	$0,6158 - 16,0894j$	$-0,0010 - 0,0248j$

  - Secuencia positiva:

$$V_1' = j\omega_s \frac{L_m}{L_r}\left[\frac{p_1\left(\Lambda_a^b - \Lambda_a^{a+} + \Lambda_a^{a-*}\right)}{(p_1 - p_2)} - \frac{\left(\Lambda_A^b - \Lambda_A^{a+} + \Lambda_A^{a-*}\right)}{(p_1 - p_2)} + \Lambda_a^{a+}\right]$$

$$\begin{aligned} V_1' =& (0,045 + 377,6\text{j})\,(0,1348 - 0,8816\text{j} - 0,0897 + 0,5872\text{j} + 0,0095 - 0,0006\text{j}) \\ & - (-23,4 + 0,9\text{j})\,(0,0023 - 0,9219\text{j} - 0,0014 + 0,6140\text{j} - 0,0080 - 0,3045\text{j}) \\ & + (221,37 + 33,8\text{j}) \end{aligned}$$

$$V_1' = 326,03 + 39,357j\ V = 0,948\angle 6,88^\circ\ pu$$

  - Secuencia negativa:

$$\vec{V_2'} = j\omega_s \frac{L_m}{L_r}\Lambda_a^{a-}$$

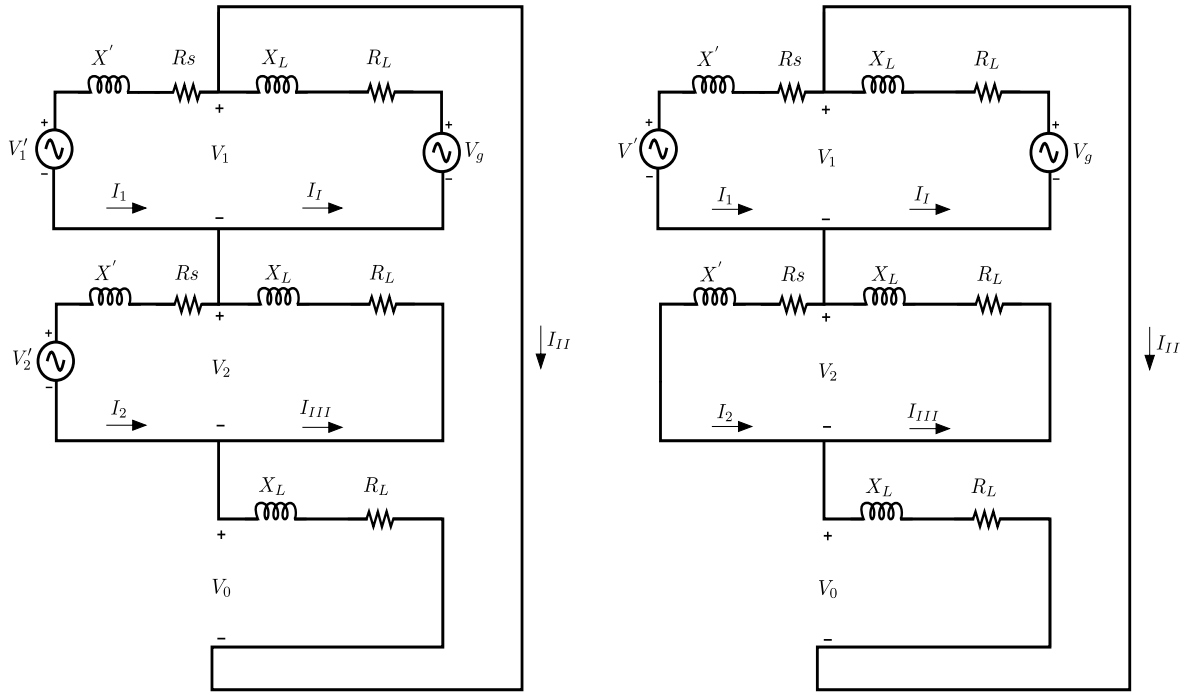
$$\vec{V_2'} = (377j)\,\frac{0,0021}{0,0021}(0,0095 + 0,0006j)$$

$$\vec{V_2'} = -0,2042 + 3,5079j\ V = 0{,}0101\angle 93{,}33^\circ\ pu$$

Los resultados de las tensiones de secuencia positiva son diferentes para los tres casos lo cual puede cambiar significativamente los valores de las corrientes de cortocircuito en cada fase, ya que existe mucha sensibilidad de las corrientes de corto debido a los valores de la fuente de tensión [22]. En el caso de las tensiones de secuencia negativa la tensión varía únicamente en el signo del ángulo, esto se debe a la forma como se representó el vector espacial en su equivalente fasorial en la Ecuación 3-30.

Obtenidos los valores de las fuentes de tensión es necesario realizar el análisis de la falla durante el estado transitorio. Esto se logra con la conexión de las redes de secuencia de la Figura **3-1** en serie, tal y como se hizo durante el estado estable de la falla (ver Figura **3-3**), y así obtener las corrientes que fluyen por las diferentes redes de secuencia de la máquina.

En la Figura **3-4** se puede observar los diferentes circuitos para fallas monofásicas en el estado transitorio cuando se utilizan los enfoques de dos fuentes y de una fuente en el modelo de la máquina.



(a) Dos fuentes de tensión. (b) Una fuente de tensión.

Figura 3-4.: Circuito de estado transitorio de la máquina de inducción durante un cortocircuito monofásico.

A partir de estos circuitos se puede plantear la ley de tensiones de Kirchhoff para encontrar los valores de las corrientes que fluyen por las mallas:

- Modelo de dos fuentes:

$$\begin{bmatrix} V_g - V'_1 \\ V'_1 + V'_2 \\ -V'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_L + Z' & -Z' & 0 \\ -Z' & Z_L + 2Z' & -Z' \\ 0 & -Z' & Z_L + Z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} \tag{3-40}$$

- Modelo de una fuente: El sistema cambia únicamente en el vector de tensiones.

$$\begin{bmatrix} V_g - V' \\ V' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_L + Z' & -Z' & 0 \\ -Z' & Z_L + 2Z' & -Z' \\ 0 & -Z' & Z_L + Z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} \tag{3-41}$$

El resultado de estas corrientes es el siguiente:

- Modelo de tensión propuesto de dos fuentes:

$$\begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56484 - 575938j \\ 58258 - 578938j \\ 58271 - 575269j \end{bmatrix} A \tag{3-42}$$

- Modelo de tensión propuesto de una fuente:

$$\begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56595 - 575941j \\ 58258 - 578938j \\ 58160 - 575265j \end{bmatrix} A \tag{3-43}$$

- Modelo de tensión de Howard:

$$\begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56856 - 575939j \\ 58183 - 578934j \\ 57975 - 575271j \end{bmatrix} A \tag{3-44}$$

Se procede entonces a realizar la equivalencia de las corrientes de secuencias de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_I - I_{II} \\ I_2 &= I_{III} - I_{II} \ . \end{aligned} \tag{3-45}$$

Los resultados son los siguientes:

- Modelo de tensión propuesto de dos fuentes:

  $I_1 = -1773,9 + 2999,7j \ A$
  $I_2 = 13,5 + 3668,8j \ A$

- Modelo de tensión propuesto de una fuente:

  $I_1 = -1662,6 + 2996,2j \ A$
  $I_2 = -97,74 + 3672,5j \ A$

- Modelo de tensión de Howard:

  $I_1 = -1327,3 + 2994,4j \ A$
  $I_2 = -208,2 + 3663,1j \ A$

Finalmente para obtener las corrientes de cortocircuito es necesario aplicar la transformada de Fortescue explicada en la Sección 1.2 en las corrientes de secuencia así:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} . \tag{3-46}$$

- Modelo de tensión propuesto de dos fuentes:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1760,4 + 6668,7j \\ 300,7 - 1786,3j \\ 1459,6 - 4882,4j \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3{,}95\angle 104,78° \\ 1{,}04\angle -80,44° \\ 2{,}92\angle -73,36° \end{bmatrix} pu$$

- Modelo de tensión propuesto de una fuente:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1760,4 + 6668,7j \\ 294,5 - 1979,1j \\ 1465,8 - 4689,6j \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3{,}95\angle 104{,}79° \\ 1{,}15\angle -81{,}54° \\ 2{,}81\angle -72{,}64° \end{bmatrix} pu$$

- Modelo de tensión de Howard:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -886,5 + 3843,7j \\ 108,9 - 1362,2j \\ 777,6 - 2481,4j \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3,91\angle 102,9° \\ 1,35\angle -85,43° \\ 2,58\angle -72,6° \end{bmatrix} pu$$

A continuación se procede a realizar el cálculo con el modelo clásico explicado en la Sección 1.2. El procedimiento es el mismo que en el caso de la metodología propuesta de una fuente de tensión, por lo tanto se muestran solamente los resultados de las corrientes de fase.

- Metodología clásica:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1760,4 + 6668,7j \\ 294,5 - 1979,1j \\ 1465,8 - 4689,6j \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3,95\angle 104,79° \\ 1,15\angle -81,54° \\ 2,81\angle -72,64° \end{bmatrix} pu$$

Para determinar el error entre las corrientes calculadas con las tres metodologías estudiadas se utilizará como parámetro las corrientes de cortocircuito halladas con la metodología clásica. Estos errores se pueden observar en la Tabla **3-4** en donde se encuentran tabulados los errores entre las magnitudes y entre los ángulos de los fasores.

Como se puede observar, la metodología de Howard para el cálculo de las corrientes definida por la Ecuación 3-30 presenta un error importante en las magnitudes de las corrientes de las fases B y C, sin embargo lo que respecta a los errores de los ángulos, los valores son pequeños para las tres fases, y por lo tanto es posible afirmar que son buenas aproximaciones de los

ángulos obtenidos con los valores parámetro.

Analizando la metodología propuesta de las 2 fuentes, vemos que aunque aún se evidencian errores en las fases B y C, el modelo aumenta la precisión del metodología anterior tanto en las magnitudes como en los ángulos; adicionalmente este modelo ofrece mayor facilidad del cálculo de la tensión lo que implica una ventaja adicional.

Finalmente al usar la metodología propuesta de una fuente, no solo se evita el cálculo de la fuente de tensión transitoria de secuencia negativa, sino que también se obtiene una mayor exactitud. Esto se debe a que los errores tienen valores del orden de 10^{-11} pu; además sólo se necesita el cálculo del flujo de estado estable de prefalla para encontrar la tensión transitoria. En consecuencia, el modelo propuesto de una fuente es el método más confiable de los tres al evidenciar errores muy pequeños en las corrientes de fase.

Tabla 3-4.: Errores de las corrientes de cortocircuito

Corrientes de fase	***Howard***		***Propuesta 2 fuentes***		***Propuesta 1 fuente***	
	Mag.	***Áng***	***Mag.***	***Áng.***	***Mag.***	***Áng.***
I_a	0,94 %	1,72 %	0 %	0 %	$0,0298 * 10^{-11}$ %	$0,1350 * 10^{-11}$ %
I_b	18,3 %	4,77 %	9,47 %	1,34 %	$0,3486 * 10^{-11}$ %	$0,2288 * 10^{-11}$ %
I_c	8,33 %	0,06 %	3,72 %	0,98 %	$0,1017 * 10^{-11}$ %	$0,1248 * 10^{-11}$ %

Cálculo de las corrientes de cortocircuito para otras máquinas

Ya observamos cómo es el comportamiento de los tres métodos en el modelo de la tensión transitoria para el ejemplo del generador asíncrono de 2400 hp ante una falla monofásica. Sin embargo es necesario verificar aún más la validez de los métodos al simular fallas simétricas y asimétricas en otras máquinas. El procedimiento para el cálculo de los flujos de prefalla y posfalla es el mismo que en el caso anterior, lo que cambia principalmente es la topología del circuito dependiendo del tipo de falla que se este analizando, ver Apéndice B.

Desde la Tabla **3-5** hasta la Tabla **3-9** se presentan todos los valores obtenidos de las corrientes de cortocircuito en las fases a, b y c, junto con los errores encontrados para cada fase en su magnitud y ángulo, cuando se simulan fallas simétricas y fallas asimétricas con los tres enfoques de cálculo mencionados anteriormente. Las simulaciones de las fallas se realizaron en las máquinas que se han venido estudiando a lo largo de la tesis.

Tabla 3-5.: Máquina de 1 hp.

Tipo de falla		*10 Hp*								
		Propuesta 2 fuentes			*Howard*			*Propuesta 1 fuente*		
		$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***	$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***	$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***
	I_a	$4,42\angle 135,7°$	0 %	0 %	$1,8\angle -170,5°$	58,5 %	225 %	$4,42\angle 135,7°$	$0,3196 * 10^{-11}$ %	$0,0984 * 10^{-11}$ %
1ϕ	I_b	$1,07\angle -25,35°$	20 %	47 %	$2,27\angle -164,30°$	70,5 %	243 %	$1,33\angle -47,85°$	$0,8542 * 10^{-11}$ %	$0,1337 * 10^{-11}$ %
	I_c	$3,42\angle -49,98°$	11 %	17,2 %	$4,10\angle 12,92°$	32,8 %	130 %	$3,09\angle -42,63°$	$0,0891 * 10^{-11}$ %	$0,3433 * 10^{-11}$ %
	I_a	$2,21\angle 149°$	0 %	0 %	$2,30\angle -103,7°$	4,05 %	169,6 %	$2,21\angle 149°$	$0,44 * 10^{-11}$ %	$0,2 * 10^{-11}$ %
2ϕ	I_b	$6,59\angle 35,43°$	5,66 %	11,51 %	$4,25\angle 58,7°$	31,8 %	84,74 %	$6,24\angle 31,77°$	$0,15 * 10^{-11}$ %	$0,14 * 10^{-11}$ %
	I_c	$6,06\angle -125°$	8,46 %	2,03 %	$2,17\angle -140°$	61,06 %	9,7 %	$5,58\angle -127,6°$	$0,16 * 10^{-13}$ %	$0,08 * 10^{-11}$ %
	I_a	$6,71\angle -48,49°$	$0,1323 * 10^{-13}$ %	$0,2931 * 10^{-13}$ %	$3,1\angle 120,2°$	53,87 %	347,88 %	$6,71\angle -48,49°$	$0,13 * 10^{-13}$ %	$0,29 * 10^{-13}$ %
3ϕ	I_b	$6,71\angle -168,49°$	$0,3968 * 10^{-13}$ %	$0,1687 * 10^{-13}$ %	$3,1\angle 0,19°$	53,87 %	100,12 %	$6,71\angle -168,49°$	$0,39 * 10^{-13}$ %	$0,17 * 10^{-13}$ %
	I_c	$6,71\angle 71,50°$	$0,2645 * 10^{-13}$ %	$0,1987 * 10^{-13}$ %	$3,1\angle -119,8°$	53,87 %	267,53 %	$6,71\angle 71,50°$	$0,26 * 10^{-13}$ %	$0,19 * 10^{-13}$ %

Tabla 3-6.: Máquina de 10 hp.

Tipo de falla		*10 Hp*								
		Propuesta 2 fuentes			*Howard*			*Propuesta 1 fuente*		
		$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***	$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***	$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***
	I_a	$3,29\angle 115,4°$	0 %	0 %	$1,98\angle 143,5°$	39,82 %	24,35 %	$3,29\angle 115,41°$	$0,1927 * 10^{-11}$ %	$0,0025 * 10^{-11}$ %
1ϕ	I_b	$0,7\angle -63,18°$	25,06 %	12,02 %	$1,04\angle -176,3°$	11,39 %	145,6 %	$0,94\angle -71,82°$	$0,4994 * 10^{-11}$ %	$0,4373 * 10^{-11}$ %
	I_c	$2,59\angle -64,96°$	9,47 %	5,23 %	$2,86\angle 22,91°$	20,69 %	62,9 %	$2,37\angle -61,74°$	$0,0375 * 10^{-11}$ %	$0,1726 * 10^{-11}$ %
	I_a	$1,63\angle 130,2°$	0 %	0 %	$1,35\angle -156°$	17,25 %	219,8 %	$1,63\angle 130,2°$	$0,1937 * 10^{-10}$ %	$0,0688 * 10^{-10}$ %
2ϕ	I_b	$4,78\angle 14,32°$	1,75 %	27,15 %	$3,70\angle 27,9°$	21,25 %	148,6 %	$4,7\angle 11,26°$	$0,0576 * 10^{-10}$ %	$0,1713 * 10^{-10}$ %
	I_c	$4,33\angle 145,87°$	3,93 %	1,90 %	$2,35\angle -149,7°$	43,37 %	0,68 %	$4,16\angle -148,7°$	$0,0252 * 10^{-10}$ %	$0,0273 * 10^{-10}$ %
	I_a	$5,04\angle -69,33°$	$0,2291 * 10^{-12}$ %	$0,4099 * 10^{-13}$ %	$1,05\angle 24,75°$	79,18 %	135,7 %	$5,04\angle -69,33°$	$0,2291 * 10^{-12}$ %	$0,499 * 10^{-13}$ %
3ϕ	I_b	$5,04\angle -170,7°$	$0,1938 * 10^{-12}$ %	0 %	$1,05\angle -95,24°$	79,18 %	155,8 %	$5,04\angle -170,7°$	$0,138 * 10^{-12}$ %	0 %
	I_c	$5,04\angle 50,7\circ$	$0,2291 * 10^{-12}$ %	$0,4207 * 10^{-13}$ %	$1,05\angle 144,8°$	79,18 %	185,7 %	$5,04\angle 50,7\circ$	$0,2291 * 10^{-12}$ %	$0,4207 * 10^{-13}$ %

Tabla 3-7.: Máquina de 20 hp.

Tipo de falla		*20 Hp*								
		Propuesta 2 fuentes			*Howard*			*Propuesta 1 fuente*		
		$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***	$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***	$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***
	I_a	$3,95\angle 116,7°$	0 %	0 %	$2,25\angle 143,8°$	43,04 %	23,29 %	$3,95\angle 116,7°$	$0,1294 * 10^{-11}$ %	$0,0305 * 10^{-11}$ %
1ϕ	I_b	$0,94\angle -64,1°$	21,5 %	9,93 %	$1,35\angle -170,2°$	13,36 %	139,3 %	$1,19\angle -71,13°$	$0,1043 * 10^{-11}$ %	$0,3236 * 10^{-11}$ %
	I_c	$3\angle -63,1°$	8,7 %	5,19 %	$3,33\angle -19,22°$	20,31 %	67,96 %	$2,76\angle -60°$	$0,2550 * 10^{-11}$ %	$0,0545 * 10^{-11}$ %
	I_a	$1,92\angle 130,4°$	0 %	0 %	$1,5\angle -150,7°$	23,12 %	215,7 %	$1,92\angle 130,4°$	$0,1259 * 10^{-10}$ %	$0,4818 * 10^{-11}$ %
2ϕ	I_b	$5,7\angle 15,7°$	1,68 %	21,5 %	$4,3\angle 29,8°$	23,17 %	131,4 %	$5,6\angle 12,89°$	$0,0614 * 10^{-10}$ %	$0,804 * 10^{-11}$ %
	I_c	$5,2\angle -144,6°$	3,6 %	1,72 %	$2,83\angle -149,8°$	43,69 %	1,81 %	$5,02\angle -147,17°$	$0,0363 * 10^{-10}$ %	$0,2260 * 10^{-11}$ %
	I_a	$6,04\angle -67,69°$	$0,2291 * 10^{-12}$ %	$0,4099 * 10^{-13}$ %	$1,15\angle 33,86°$	80,9 %	150 %	$6,04\angle -67,69°$	$0,3086 * 10^{-12}$ %	$0,4198 * 10^{-13}$ %
3ϕ	I_b	$6,04\angle 172,3°$	$0,1938 * 10^{-12}$ %	0 %	$1,15\angle -86,14°$	80,9 %	149,9 %	$6,04\angle 172,3°$	$0,3379 * 10^{-12}$ %	$0,1650 * 10^{-13}$ %
	I_c	$6,04\angle 52,30\circ$	$0,2291 * 10^{-12}$ %	$0,4207 * 10^{-13}$ %	$1,15\angle 153,9°$	80,9 %	194,2 %	$6,04\angle 52,30\circ$	$0,3086 * 10^{-12}$ %	$0,6790 * 10^{-13}$ %

Tabla 3-8.: Máquina de 500 hp.

Tipo de falla		*500 Hp*								
		Propuesta 2 fuentes			*Howard*			*Propuesta 1 fuente*		
		$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***	$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***	$I\ (pu)$	***Mag.***	***Áng.***
	I_a	$3,04\angle 126,1°$	0 %	0 %	$0,97\angle 149,3°$	68,04 %	18,5 %	$3,04\angle 126,1°$	$0,1780 * 10^{-11}$ %	$0,0327 * 10^{-11}$ %
1ϕ	I_b	$1,3\angle 20,85°$	45,9 %	144,5 %	$0,95\angle -112,1°$	6,32 %	139,3 %	$0,89\angle -46,81°$	$0,2912 * 10^{-11}$ %	$0,4553 * 10^{-11}$ %
	I_c	$2,98\angle -78,87°$	37,9 %	38,7 %	$1,25\angle 17,81°$	42,01 %	131,3 %	$2,16\angle -56,88°$	$0,3494 * 10^{-11}$ %	$0,0837 * 10^{-11}$ %
	I_a	$1,62\angle 139,1°$	0 %	0 %	$0,93\angle -150,7°$	42,17 %	177 %	$1,62\angle 139,12°$	$0,2474 * 10^{-11}$ %	$0,1839 * 10^{-11}$ %
2ϕ	I_b	$5,27\angle 29,9°$	24,37 %	43,45 %	$3,25\angle 23,03°$	23,25 %	10,32 %	$4,24\angle 20,88°$	$0,1279 * 10^{-11}$ %	$0,1770 * 10^{-11}$ %
	I_c	$4,98\angle -132,1°$	32,62 %	3,36 %	$2,74\angle --172,2°$	26,92 %	25,94 %	$3,75\angle -136,69°$	$0,2889 * 10^{-11}$ %	0 %
	I_a	$4,52\angle -58,59°$	$0,5890 * 10^{-13}$ %	$0,4890 * 10^{-13}$ %	$1,73\angle -132,2°$	61,77 %	125,6 %	$4,52\angle -58,59°$	$0,3086 * 10^{-12}$ %	$0,5890 * 10^{-13}$ %
3ϕ	I_b	$4,52\angle -178,6°$	$0,3927 * 10^{-13}$ %	$0,1591 * 10^{-13}$ %	$1,15\angle -107,8°$	61,77 %	160,4 %	$4,52\angle -178,6°$	$0,3379 * 10^{-12}$ %	$0,3927 * 10^{-13}$ %
	I_c	$4,52\angle 61,40\circ$	$0,5890 * 10^{-13}$ %	$0,5786 * 10^{-13}$ %	$1,15\angle -12,18°$	61,77 %	119,8 %	$4,52\angle 61,40\circ$	$0,3086 * 10^{-12}$ %	$0,5890 * 10^{-13}$ %

Tabla 3-9.: Máquina de 2400 hp

Tipo de falla		*2400 Hp*								
		Propuesta 2 fuentes			*Howard*			*Propuesta 1 fuente*		
		I (pu)	*Mag.*	*Áng.*	*I (pu)*	*Mag.*	*Áng.*	*I (pu)*	*Mag.*	*Áng.*
	I_a	$3,95\angle 104,79°$	0 %	0 %	$3,91\angle 102,99°$	0,94 %	1,72 %	$3,95\angle 104,8°$	$0,1350 * 10^{-11}$ %	$0,0298 * 10^{-11}$ %
1ϕ	I_b	$1,04\angle -80,44°$	9,5 %	1,33 %	$1,35\angle -85,43°$	18,3 %	4,77 %	$1,15\angle -81,54°$	$0,2288 * 10^{-11}$ %	$0,3486 * 10^{-11}$ %
	I_c	$2,92\angle -73,36°$	3,7 %	0,98 %	$2,56\angle -72,6°$	8,33 %	0,06 %	$2,81\angle -72,64°$	$0,1248 * 10^{-11}$ %	$0,1017 * 10^{-11}$ %
	I_a	$1,96\angle 119,1°$	0 %	0 %	$1,89\angle 115,8°$	3,31 %	177 %	$1,96\angle 119,1°$	$0,1588 * 10^{-12}$ %	$0,0029 * 10^{-12}$ %
2ϕ	I_b	$5,62\angle 1,79°$	0,11 %	169,9 %	$5,55\angle -1,59°$	1,05 %	338,5 %	$5,61\angle 0,67°$	$0,0633 * 10^{-12}$ %	$0,1949 * 10^{-12}$ %
	I_c	$5,03\angle -157,9°$	0,88 %	0,73 %	$4,98\angle -161,9°$	0,23 %	1,7 %	$4,99\angle -157,9°$	$0,370 * 10^{-12}$ %	$0,0013 * 10^{-12}$ %
	I_a	$6,03\angle -79,84°$	$0,1327 * 10^{-12}$ %	$0,0534 * 10^{-12}$ %	$5,97\angle -83,5°$	0,8433 %	4,58 %	$6,03\angle -79,84°$	$0,1327 * 10^{-12}$ %	$0,0534 * 10^{-12}$ %
3ϕ	I_b	$6,03\angle 160,2°$	$0,1179 * 10^{-12}$ %	$0,0177 * 10^{-12}$ %	$5,97\angle 156,5°$	0,8433 %	2,29 %	$6,03\angle 160,2°$	$0,1179 * 10^{-12}$ %	$0,0177 * 10^{-12}$ %
	I_c	$6,03\angle 40,16°$	$0,1179 * 10^{-12}$ %	$0,1239 * 10^{-12}$ %	$5,97\angle 36,5°$	0,8433 %	9,11 %	$6,03\angle 40,16°$	$0,1179 * 10^{-12}$ %	$0,1239 * 10^{-12}$ %

Análisis de resultados

Se va a dividir el análisis de los resultados en los tres tipos de fallas.

- Fallas monofásicas:
  Para este caso la fase A es la fase en la que ocurrió el cortocircuito, y precisamente es aquella que presenta la mayor corriente comparada con las otras dos fases de cada una de las 5 máquinas estudiadas. Esto ocurre tanto en las metodologías propuestas como en la metodología clásica, sin embargo la metodología de Howard presenta resultados diferentes. Para este caso se presenta una mayor corriente en la fase C, excepto en la máquina de 2400 hp [3], la cual al igual que en el caso anterior, presenta la mayor corriente de cortocircuito en la fase A. Esto implica que la metodología de Howard presenta un error en la deducción de su tensión transitoria lo que se traduce en cambios muy fuertes de la corriente de falla.

  Se puede observar que las magnitudes de las corrientes de cortocircuito encontradas con el método propuesto de dos fuentes poseen un comportamiento similar para todas las máquinas. Por ejemplo, las corrientes de la fase A tienen valores de 4,42 pu, 3,29 pu, 3,95 pu, 3,04 pu y 3,95 pu, cuyo promedio es de 3,73 pu con una desviación estándar de 0,56 pu. Si se agregan los valores de las corrientes halladas con el método clásico y el método propuesto de una fuente, se encuentra que el punto medio de las corrientes es 3,73 (pu) con una desviación media de 0,452 (pu).
  De forma similar se encuentran desviaciones medias para las fases B y C de 0,153 (pu) y 0.272 (pu), las cuales representan variabilidades muy pequeñas entre los diferentes datos. El patrón no se cumple si se analizan las corrientes en amperios, dado que éstos no son valores normalizados y por lo tanto no permiten que se hagan comparaciones de la misma manera.

  Sí se realiza el mismo análisis para la metodología de Howard se encuentran las siguientes desviaciones: 0,7184 (pu), 0,3592 (pu) y 0,7368 (pu) para las fases A, B y C

[3] Máquina propuesta en el artículo que presentó la metodología.

respectivamente. Se puede observar que existe un incremento importante en las desviaciones respecto a los otros métodos, lo que significa que hay una mayor variabilidad de los datos y en consecuencia el comportamiento de las corrientes es menos predecible, esto sin tener en cuenta que las magnitudes de las corrientes son muy diferentes a los otros casos. El promedio de los errores encontrados en las magnitudes con esta metodología es del 31 %, lo que supera en un 17,4 % al error promedio encontrado en las magnitudes de las corrientes calculadas con la metodología propuesta de dos fuentes.

Analizando los errores en los valores de los ángulos, se puede decir que existe una diferencia pronunciada encontrada con los enfoques de dos fuentes. Unos errores promedio de 14,52 % y 90,47 % corresponden al modelo propuesto de dos fuentes y al modelo de Howard respectivamente. Aunque la metodología de dos fuentes presenta una mejor aproximación que la metodología de Howard, aún así presenta errores relevantes que no permiten obtener mayor exactitud a la hora de encontrar las corrientes de falla; sin embargo, el comportamiento de las corrientes obtenidas con la metodología propuesta de una fuente es diferente ya que los errores están del orden de 10^{-11} pu.

- Fallas bifásicas:
  En este tipo de fallas se puede encontrar que dos fases poseen magnitudes muy similares en las corrientes de cortocircuito. Para las metodologías propuestas se encuentran en las fases B y C, que corresponden a las fases falladas, mientras que con el modelo de Howard se encuentran comportamientos similares pero no necesariamente en la mismas fases. Para el enfoque propuesto de dos fuentes, el error promedio en las magnitudes encontrado fue de 5,54 %, el cual representa una mejoría significativa comparada con la misma metodología pero en fallas monofásicas. En el caso del modelo de Howard el error análogo al caso anterior es de 24,4 % que se ve afectado por valores atípicos encontrados en las diferentes máquinas, como por ejemplo el caso de la máquina de 2400 hp en donde el error mínimo es de 0,23 % o en el caso de la máquina de 1 hp donde el error máximo es del 61,06 %.

  Los errores de los ángulos son significativos para los métodos de dos fuentes, pero como lo más significativo en un estudio de cortocircuito es la magnitud de la corriente, entonces se puede afirmar que el modelo más apropiado después del enfoque de una fuente es el modelo propuesto de dos fuentes, ya que éste aumenta la precisión del modelo de Howard en un 20 % aproximadamente.

  Al igual que en el caso monofásico el modelo propuesto de una fuente es el modelo que presenta los mejores resultados, incluso en los valores de los ángulos de las corrientes de fase.

- Fallas trifásicas:
  Lo que respecta a fallas simétricas se encontraron comportamientos muy similares en las magnitudes de las corrientes para los enfoques propuestos y el método clásico, ya que los tres presentan los mismos valores hasta algunos decimales. Ésta es la falla que presenta valores más exactos en los fasores y por lo tanto son los datos más confiables para todos los casos. En el caso de la metodología de Howard, sólo se presentan valores similares a las otras metodologías en la máquina de 2400 hp, lo que genera cierta incertidumbre sobre la validez del modelo.

  Adicionalmente, esta falla se caracteriza por tener la mayor corriente de cortocircuito comparada con fallas asimétricas, y como la metodología de Howard no presenta dicho comportamiento, se puede afirmar que la forma de separar las ecuaciones para fallas simétricas y fallas asimétricas en la metodología de Howard no tiene validez.

Si se desea modelar la máquina de inducción en fallas asimétricas con una fuente de tensión transitoria de secuencia positiva y una fuente transitoria de tensión de secuencia negativa para cualquier tipo de estudio eléctrico, se puede utilizar el método propuesto de dos fuentes, que aunque también depende de la solución de los circuitos de prefalla y posfalla, sólo es necesario encontrar dos valores de los flujos y por lo tanto es más fácil su cálculo debido al número de variables inmersas en las ecuaciones.

El modelo propuesto de dos fuentes se presentó como una mejor alternativa que el modelo de Howard, sin embargo el modelo propuesto de una fuente, brinda una exactitud muy alta respecto a la metodología clásica, y además presenta menos dificultad en calcular la tensión transitoria de secuencia positiva, lo que brinda una ventaja adicional.

Para fallas simétricas cualquiera de los métodos propuestos puede ser usado, ya que con ambos se encuentran los mismos valores tanto en ángulos como en magnitud, sin embargo es más recomendable utilizar la Ecuación 3-28 ya que es más simple de calcular; además, este tipo de fallas es conocido por presentar facilidad en sus cálculos y obtener las mayores magnitudes de corriente presentadas en un circuito determinado lo que permite realizar un buen diseño del sistema de protecciones.

4. Análisis de cortocircuitos en un sistema de potencia con máquinas de inducción

En este capítulo se presenta el análisis de un cortocircuito en un sistema de potencia de prueba al incluir una máquina de inducción, la cual puede ser representada como una carga, es decir que funciona como un motor, o tambien se puede incluir como generador que usualmente se emplea para estudios de parques eólicos en las redes de distribución, o parques offshore en el caso de los sistemas de transmisión.

Para realizar el análisis de fallas en un sistema de potencia es necesario obtener un equivalente de la red, el cual esta compuesto por una fuente de tensión con el valor de voltage de prefalla de la barra donde se realiza el corto, y también por la impedancia equivalente de la red de secuencia positiva, negativa y cero visto desde el mismo punto de falla. Las tensiones de prefalla de las barras se pueden obtener a partir de la solución de un flujo de carga, y la manera de incluir los efectos de las corrientes de carga en el análisis de falla es expresar las cargas como impedancias constantes evaluadas en las tensiones de prefalla de la barra. Adicionalemente, algunos elementos del sistema como generadores, equivalentes de red, motores síncronos, entre otros, aportan corrientes de cortocircuito y por lo tanto se modelan mediante una impedancia en serie con fuente de tensión, o como una impedancia en paralelo con una fuente de corriente [47–52].

4.1. Procedimiento de cálculo

A continuación se enumerará el procedimiento que se debe seguir a la hora de realizar un análisis de fallas en un sistema de potencia [29, 53, 54].

1. Se obtienen las tensiones de prefalla de las barras por medio de un flujo de carga:

$$\mathbf{V}_{bus}(0) = \begin{bmatrix} V_1(0) \\ \vdots \\ V_k(0) \\ \vdots \\ V_n(0) \end{bmatrix} . \tag{4-1}$$

2. Las cargas son simuladas como admitancias constantes usando las tensiones de prefalla de las barras, ya que esto permite preservar la linearidad de la red:

$$Z_{iL} = \frac{|V_i(0)|^2}{S_L^*} . \tag{4-2}$$

3. Se aplica el teorema de Thevenin para obtener los incrementos en las tensiones de las barras:

$$\Delta\mathbf{V}_{bus} = \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \vdots \\ \Delta V_k \\ \vdots \\ \Delta V_n \end{bmatrix} . \tag{4-3}$$

4. Las tensiones durante el cortocircuito se obtienen por medio del teorema de superposición de las tensiones de prefalla y de los incrementos de tensión obtenidos en el paso anterior.

$$\mathbf{V}_{bus}(F) = \mathbf{V}_{bus}(0) + \Delta\mathbf{V}_{bus} . \tag{4-4}$$

5. Se obtiene la corriente de falla de la barra:

$$\mathbf{I}_{bus}(F) = Y_{bus}\Delta\mathbf{V}_{bus} , \tag{4-5}$$

$$\Delta\mathbf{V}_{bus} = Z_{bus}\mathbf{I}_{bus}(F) , \tag{4-6}$$

donde Z_{bus} es la matriz de impedancias, y Y_{bus} es la matriz de admitancias del sistema. Así el vector de tensiones de las barras durante la falla es:

$$\mathbf{V}_{bus}(F) = \mathbf{V}_{bus}(0) + \mathbf{Z}_{bus}\mathbf{I}_{bus}(F) \tag{4-7}$$

El vector de corriente incluye todas las corrientes del sistema, sin embargo debido a que la corriente de cortocircuito es mucho mayor al resto, entonces estas se pueden asumir

como cero. En consecuencia sólo existe un valor en la k-ésima posición correspondiente a la corriente de falla, dando como resultado la siguiente ecuación:

$$V_k(F) = V_k(0) - Z_{kk} I_k(F) \ . \tag{4-8}$$

Del circuito equivalente de Thevenin de la red también se puede decir que la tensión de falla es igual a:

$$V_k(F) = Z_f I_k(F) \ , \tag{4-9}$$

donde Z_f es la impedancia de falla. Esta impedancia es difícil de determinar, por lo tanto se le asignan valores bajos o como se realiza en muchos casos se asigna un valor igual a 0 Ω. A esta última condición se le da el nombre de cortocircuito sólido, el cual brinda un análisis del peor escenario posible y por lo tanto ayuda a determinar las mayores magnitudes de las corrientes en las fases del sistema.
Finalmente se obtiene la corriente de falla al sustituir la Ecuación 4-8 en la Ecuación 4-9, y despejar la corriente así:

$$I_k(F) = \frac{V_k(0)}{Z_{kk} + Z_f} \ , \tag{4-10}$$

Donde Z_{kk} es la impedancia equivalente de Thevenin del sistema, la cual corresponde al valor de la diagonal de la matriz de impedancia en la barra donde ocurrió el cortocircuito. La corriente obtenida en la Ecuación 4-10 es una corriente de secuencia positiva y representa el caso más severo de todos los tipos de fallas en lo que respecta a la magnitud de la corriente, además este tipo de falla es la más fácil de calcular.
Vamos a decir entonces que las corrientes de secuencia durante una falla, ya sea simétrica o asimétrica, se determinan por medio de las siguientes ecuaciones:

- Fallas trifásicas:
  Con este tipo de falla se obtienen las mayores magnitudes de las corrientes de cortocircuito.

  $$\begin{aligned} I'_{k1} &= \frac{V_k(0)}{Z_{kk1} + Z_f} \\ I'_{k2} &= 0 \\ I'_{k0} &= 0 \ , \end{aligned} \tag{4-11}$$

  donde el símbolo $'$ hace referencia a la corriente de cortocircuito transitoria que se presenta en la barra en donde ocurrió la falla.

- Fallas monofásicas:
  En las fallas monofásicas las redes de secuencia están conectadas en serie por lo

tanto la corriente que fluye por las tres redes es la misma, de tal forma que:

$$\begin{aligned} I'_{k1} &= \frac{V_k(0)}{Z_{kk1} + Z_{kk2} + Z_{kk0} + 3Z_f} \\ I'_{k2} &= I'_{k1} \\ I'_{k0} &= I'_{k1} \ . \end{aligned} \tag{4-12}$$

- Fallas bifásicas:
  Existen dos tipos de fallas bifásicas, la primera es la falla de línea-línea, es decir que no existe conexión con tierra, pero puede haber conexión de una impedancia entre las dos líneas, y la otra es la falla línea-línea-tierra la cual posee una impedancia de falla que conecta las dos fases con tierra.
  Se puede definir entonces las siguientes expresiones para la falla bifásicas línea-línea, y para la falla bifásica línea-línea-tierra respectivamente:
  - Falla línea-línea

$$\begin{aligned} I'_{k1} &= \frac{V_k(0)}{Z_{kk1} + Z_{kk2} + Z_f} \\ I'_{k2} &= -I'_{k1} \\ I'_{k0} &= 0 \end{aligned} \tag{4-13}$$

  - Falla línea-línea-tierra

$$\begin{aligned} I'_{k1} &= \frac{V_k(0)}{Z_{kk1} + \dfrac{Z_{kk2}(Z_{kk0} + 3Z_f)}{Z_{kk2} + Z_{kk0} + 3Z_f}} \\ I'_{k2} &= -\frac{V_k(0) - Z_{kk1}I_{k1}}{Z_{kk2}} \\ I'_{k0} &= -\frac{V_k(0) - Z_{kk1}I_{k1}}{Z_{kk0} + 3Z_f} \ , \end{aligned} \tag{4-14}$$

  donde Z_{kki} representa las impedancias de la red en la barra donde se genera el cortocircuito en las diferentes secuencias. Estas se pueden calcular a partir de las ecuaciones de tensión de la red $\mathbf{V} = \mathbf{Y^{-1}I}$ como una función de la matriz inversa de admitancias.

Al utilizar las componentes simétricas de la corriente se pueden encontrar las tensiones de secuencia de la barra i-ésima, así:

$$\begin{aligned} V_{i0}(F) &= 0 - Z_{ik0}I_{k0} \\ V_{i1}(F) &= V_{i1}(0) - Z_{ik1}I_{k1} \\ V_{i2}(F) &= 0 - Z_{ik2}I_{k2} \ , \end{aligned} \tag{4-15}$$

donde $V_{i1}(0) = V_i(0)$ es la tensión de fase de prefalla en la barra i obtenida por medio del flujo de carga.
Las componentes simétricas de la corriente de cortocircuito en la línea i,j son:

$$I_{ij0} = \frac{V_{i0}(F) - V_{j0}(F)}{z_{ij0}}$$
$$I_{ij1} = \frac{V_{i1}(F) - V_{j1}(F)}{z_{ij1}}$$
$$I_{ij2} = \frac{V_{i2}(F) - V_{j2}(F)}{z_{ij2}} \,, \tag{4-16}$$

donde $z_{ij0}\,, z_{ij1}\,, z_{ij2}$ son las impedancias de secuencia de las líneas. Para encontrar las tensiones de fase, y las corrientes de fase se utiliza la transformada de Fortescue, Ecuación 1-7.

4.2. Capacidad de cortocircuito (SCC)

La capacidad de cortocircuito o el cortocircuito MVA en una barra k se define por medio del producto de las magnitudes de la tensión nominal de la barra y la corriente de falla. Este parámetro se usa para realizar el dimensionamiento de los barrajes de las subestaciones y también para determinar la capacidad de interrupción de los disyuntores [29].
Basado en la definición anterior, la capacidad de cortocircuito en la barra k esta dada por la siguiente expresión:

$$SCC = \sqrt{3} V_k I_k(F) \times 10^{-3}\ MVA \,, \tag{4-17}$$

donde V_k es la tensión de línea expresada en kV, e $I_k(F)$ es la corriente en la barra k que se encuentra expresada en A. La corriente simétrica de falla expresada en por unidad puede ser obtenida por medio de la siguiente expresión:

$$I_k(F)_{pu} = \frac{V_k(0)}{X_{kk}} \,, \tag{4-18}$$

donde $V_k(0)$ es la tensión de prefalla en la barra k expresada en (pu), y X_{kk} es la reactancia en por unidad del punto de falla. La resistencia del sistema puede ser despreciada, ya que de esta forma la impedancia del sistema es mínima y por lo tanto la corriente que se obtiene es la máxima, brindando así el caso más severo.
La corriente base es:

$$I_B = \frac{S_B \times 10^3}{\sqrt{3} V_B} \,, \tag{4-19}$$

donde S_B es la potencia base del sistema expresada en MVA y V_B es la tensión base de línea expresada en kV. De esta forma la corriente de falla puede ser definida de la siguiente

manera:

$$\begin{aligned} I_k(F) =& I_k(F)_{pu} I_B \\ =& \frac{V_k(0)}{X_{kk}} \frac{S_B \times 10^3}{\sqrt{3} V_B} \ . \end{aligned} \tag{4-20}$$

Al sustituir la Ecuación 4-20 en Ecuación 4-17 se puede definir entonces la capacidad de cortocircuito como:

$$SCC = \frac{V_k(0) S_B}{X_{kk}} \frac{V_L}{V_B} \ MVA \tag{4-21}$$

Como la capacidad de cortocircuito es función de la corriente, entonces se pueden utilizar las tres metodologías del cálculo de la corriente de cortocircuito estudiadas en el Capítulo 3 para encontrar las diferencias que puedan existir en este parámetro de diseño.

4.3. Ejemplo

Para observar la aplicación de los modelos de la máquina en estado transitorio, se estudiará un sistema de potencia de 13 barras tomado del programa NEPLAN [53]. Hay dos máquinas de inducción de 6700 hp que se encuentran conectadas a la barra 10 y la otra a la barra 11. En la barra 12 hay un sistema de baja de tensión de 400 V compuesto por 3 barras y dos cargas. Adicionalmente, hay un equivalente de red de 220 kV conectado a la barra 1 ver Figura **4-1**[1]. Primero se analizará un cortocircuito en la barra 10, para ello es necesario encontrar un equivalente de red en dicho punto sin tener conectada la máquina de inducción.

Se procede entonces a realizar un flujo de carga para obtener la tensión de prefalla de la barra en cuestión, los resultados de prefalla se pueden observar en la Tabla **4-1**. Después se procede a encontrar la corriente de falla en la barra para que de esta forma se pueda determinar la impedancia equivalente del sistema por medio de la ley de Ohm.

$V_{10}(0) = 5202 \ V$
$I''_{10} = 7348 \angle -88,9^\circ \ A$
$Z_{equ} = 1,3596 \times 10^{-5} + 0,7081j \ \Omega$.

Ahora es necesario obtener el equivalente de la máquina de inducción. Para ello es necesario emplear las siguientes ecuaciones utilizando los parámetros que se encuentran presentes en el modelo de NEPLAN [53].

[1] Los parámetros para realizar el flujo de carga se encuentran en el Apéndice A.

Tabla 4-1.: Datos de prefalla

Nodo	***Tensión***		***Generación***		***Carga***	
	Mag. (pu)	***Áng.***	***P (MW)***	***Q (Mvar)***	***P (MW)***	***Q (Mvar)***
1	1,000	0°	26,57	-2,89	-	-
2	0,999	$0,686°$	-	-	-	-
3	0,999	$0,697°$	-	-	-	-
4	0,999	$0,704°$	-	-	-	-
5	1,004	$1,494°$	-	-	-	-
6	1,015	$2,680°$	-	-	-	-
7	1,014	$2,520°$	-	-	2	2
8	0,999	$0,710°$	-	-	-	-
9	0,999	$0,694°$	-	-	-	-
10	0,952	$-2,706°$	-	-	4	3
11	0,990	$-0,256°$	-	-	2	1
12	0,992	$0,226°$	-	-	5	4
13	1,022	$4,258°$	40	10	-	-

- Primero que todo se definen los siguientes parámetros:

$$
\begin{aligned}
&h_a = (I_r/I_a) * \cos\phi_{an} \\
&h_b = (h_a - R_1)^2 + [(I_r/I_a)\sin\phi_a n - X_1 - X_m]^2 \\
&h_c = (X_1 - (I_r/I_a)\sin\phi_{st})\left((I_r/I_a)\sin\phi_{st} - X_1 - X_m\right) - (R_1 - (I_r/I_a)\cos\phi_{st})^2 \\
&h_d = (\cos\phi - R_1)^2 + (\sin\phi - X_1 - X_h)^2 \ .
\end{aligned} \tag{4-22}
$$

- Ahora se procede a obtener las impedancias de la máquina así:

$$
\begin{aligned}
&X_s = k(I_r/I_a) \\
&X_m = 1/\left(\sin\phi - \cos\phi\left(M_k/M_r - \sqrt{(M_k/M_r)^2 - 1}\right)\right) \\
&R_s = h_a - (I_r/I_a)^2(M_a/M_r)\eta\cos\phi/(1 - s_r) \\
&R_r(s=1) = X_m^2(h_a - R_1)/h_b \\
&X_r(s=1) = X_m h_c/h_b \\
&R_r(s=s_r) = X_m^2(\cos\phi - R_1)s_r/h_d \\
&X_r(s=s_r) = X_m\left((X_s - \sin\phi)(\sin\phi - X_s - X_m) - (R_s - cos\phi)^2\right) \ ,
\end{aligned} \tag{4-23}
$$

donde:
$\cos\phi$ es el factor de potencia nominal,
$\cos\phi_{st}$ es el factor de potencia con el rotor bloqueado,

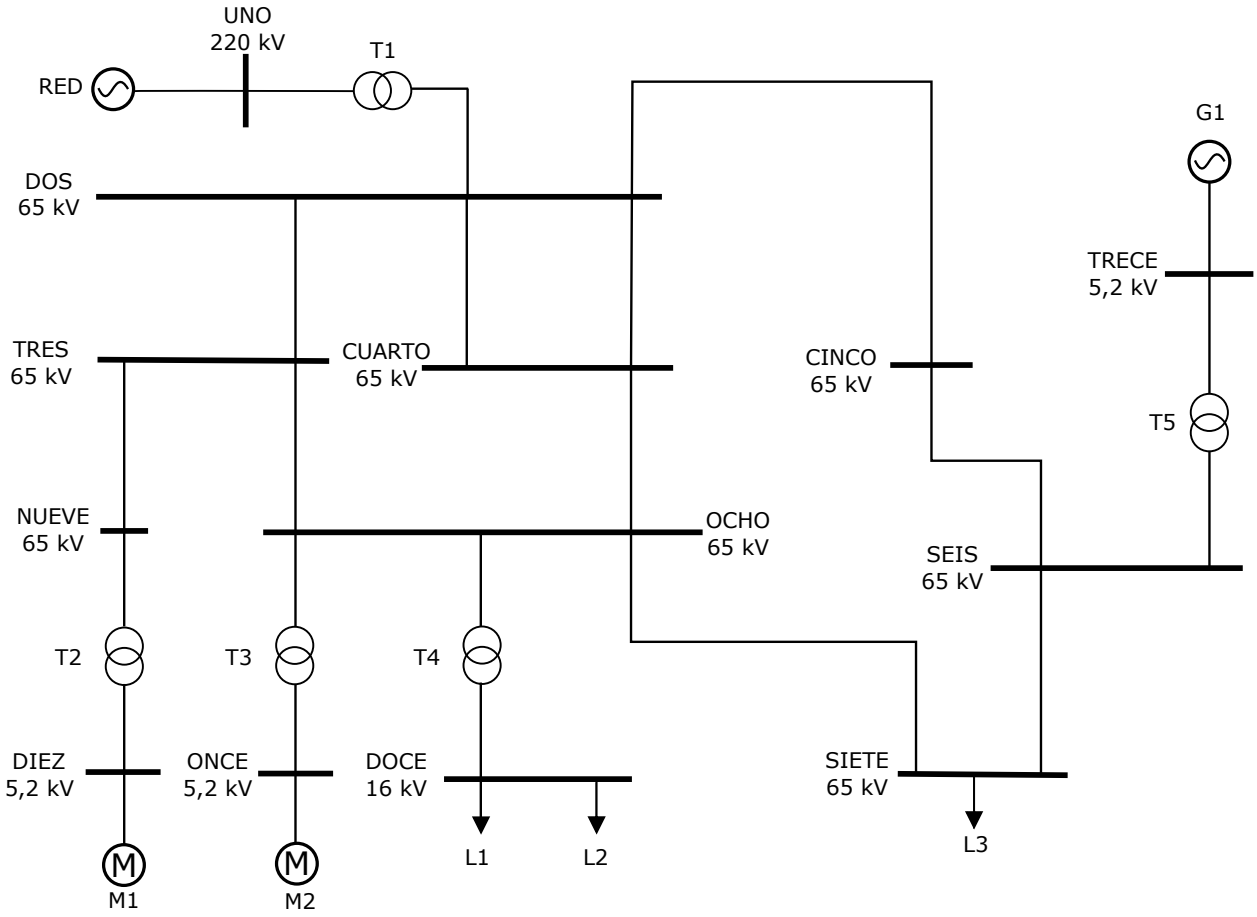


Figura 4-1.: Sistema de 13 barras.

M_r, M_k, M_a son los torques nominal, de frenado y de rotor bloqueado respectivamente,
I_r, I_a son las corrientes nominal y de rotor bloqueado,
η es la eficiencia,
s, s_r es el deslizamiento, y el deslizamiento nominal,
k es un parámetro de corrección obtener la reactancia de dispersión del devanado del estator. Esta puede tomar un valor entre el rango de $0,26 < k < 0,55$, y que por defecto es 0,5.

Reemplazando los parámetros de la máquina en las ecuaciones (4-22) y (4-23) se obtienen

los siguientes valores de impedancias:

$R_s = 0,0324\ \Omega$
$R_r = 0,0297\ \Omega$
$X_s = 0,1000\ \Omega$
$X_r = 0,0939\ \Omega$
$X_m = 2,4529\ \Omega$.

La impedancia transitoria de la máquina es igual para los tres enfoques bajo estudio, la cual está compuesta por la resistencia del devanado del estator y por la inductancia transitoria de la Ecuación 2-4.
Para ese caso es igual a:

$Z' = R_s + L'\omega_s j = 0,0324 + 0,1905j\ \Omega$.

Obtenidas las impedancias reales de la máquina, es posible determinar las ecuaciones de tensión transitoria con los tres modelos definidos en el capítulo anterior, Ecuación 3-26, Ecuación 3-28 y Ecuación 3-30.

- Modelo propuesto de dos fuentes:

  $V_1' = 1975,4\angle -21,78°\ V$
  $V_2' = 17,58\angle -84,18°\ V$.

- Modelo propuesto de una fuente:

  $V' = 1983,6\angle -22,23°\ V$

- Modelo de Howard:

  $V_1' = 743,06\angle -21,39°\ V$
  $V_2' = 17,52\angle 84,18°\ V$.

Con los parámetros del circuito equivalente de la máquina y del sistema de potencia, ver Figura **3-1**, es posible determinar las corrientes de cortocircuito que fluyen por la máquina por medio de la metodología explicada en el ejemplo del capítulo anterior.

Sólo se presentan las corrientes de cortocircuito durante una falla trifásica y una falla monofásica. La falla trifásica se simula ya que ésta es la falla con magnitudes de corriente mayores y aquella que presenta mayor facilidad de cálculo; adicionalmente se simula la falla monofásica debido a que es la falla con mayor probabilidad de ocurrencia. Los resultados de las corrientes durante la falla simétrica calculados con los tres enfoques son los siguientes:

- Modelo propuesto de dos fuentes:

  $I_a = 1823,2\angle -106,39°\ A$
  $I_b = 1823,2\angle 133,60°\ A$
  $I_c = 1823,2\angle 13,60°\ A$

- Modelo propuesto de una fuente:

  $I_a = 1823,2\angle -106,39°\ A$
  $I_b = 1823,2\angle 133,60°\ A$
  $I_c = 1823,2\angle 13,60°\ A$

- Modelo de Howard:

  $I_a = 1016\angle 95,27°\ A$
  $I_b = 1016\angle -24,73°\ A$
  $I_c = 1016\angle -144,73°\ A$.

Los resultados de las corrientes de fase durante en cortocircuito monofásico son:

- Modelo propuesto de dos fuentes:

  $I_a = 932,1\angle 56,12°\ A$
  $I_b = 1024,5\angle -130,11°\ A$
  $I_c = 140,8\angle 3,94°\ A$

- Modelo propuesto de una fuente:

  $I_a = 932,1\angle 56,12°\ A$
  $I_b = 1036,5\angle -129,5°\ A$
  $I_c = 142,1\angle 10,51°\ A$

- Modelo de Howard:

  $I_a = 413,9\angle -36,49°\ A$
  $I_b = 1240,7\angle -172,17°\ A$
  $I_c = 987,8\angle 24,85°\ A$.

Se puede observar que al igual que en las otras máquinas analizadas, los enfoques propuestos presentan los mismos valores para las tres fases en la falla simétrica no sólo en la magnitud, sino también en el ángulo, mientras que la metodología de Howard presenta una diferencia en la corriente respecto a los otros modelos.

Al igual que en las máquinas analizadas en el capítulo anterior la metodología de Howard, sigue presentando discrepancias en los valores de las corrientes respecto a los otros enfoques, por lo tanto es necesario observar como impacta esta diferencia en las capacidades de cortocircuito de la barra calculadas con la Ecuación 4-17.

- Métodos propuestos: Este cálculo representa los dos enfoques propuestos ya que ambos generan las mismas corrientes de cortocircuito.

$$\begin{aligned} SCC =& \sqrt{3} V_k I_k(F) \times 10^{-3}\ MVA\ , \\ =& \sqrt{3}(5,2) * (1823,2 \times 10^{-3}) \\ =& 16,421\ (MVA)\ . \end{aligned}$$

- Método de Howard:

$$\begin{aligned} SCC =& \sqrt{3} V_{Lk} I_k(F) \times 10^{-3}\ MVA\ , \\ =& \sqrt{3}(5,2) * (1016,2 \times 10^{-3}) \\ =& 9,1526\ (MVA)\ . \end{aligned}$$

Al observar la capacidad de cortocircuito se encuentra que para este caso la metodología de Howard presenta un valor menor, lo que implica que los sistemas de protección y el dimensionamiento de los barrajes de la subestación pueden ser inadecuados. Este mal dimensionamiento puede generar daños severos en los equipos ante fallos que se puedan presentar en la red y en la subestación como tal.

Para el caso de la barra 11, se pudo observar que el comportamiento tanto de las corrientes de corto como de las capacidades de cortocircuito son muy similares a los resultados obtenidos en el caso de la barra 10. Esto se debe al hecho de que las dos máquinas conectadas a las diferentes barras poseen la mayoría de los parámetros iguales, y por lo tanto el cálculo de las corrientes de cortocircuito utilizando las tres metodologías presentan el mismo comportamiento que en el caso de la barra 10. Es así como para este caso se obtienen capacidades de cortocircuito menores cuando las corrientes son calculadas con la metodología de Howard.

5. Conclusiones

Capítulo 2

Se puede decir que el método de cálculo propuesto en esta tesis para obtener la corriente de cortocircuito por medio del vector espacial dado en la Ecuación 2-45 es más exacto que aquel propuesto en [21] definido por la Ecuación 2-51. Esto se debe a la diferencia existente en la componente de estado estable entre las dos ecuaciones, lo que se traduce en cambios importantes de la forma de onda de los vectores en la parte real, lo que a su su vez genera cambios en las corrientes instantáneas de cada fase.

Las metodologías para el cálculo de las corrientes espaciales de cortocircuito dependen de la velocidad, para lo cual se asumió la velocidad de prefalla, dando como resultado la solución de la ecuación de estados de la máquina, Ecuación 2-5. Esta suposición varía el efecto en las diferentes fallas. Por ejemplo, en el caso trifásico la corriente no se ve afectada por el incremento de la velocidad ya que la máquina pierde magnetización durante la falla, dando como resultado que la corriente de cortocircuito vaya disminuyendo su valor hasta alcanzar un valor igual a cero, y en consecuencia los incrementos en la velocidad no afectan la forma de onda. Se valida esta conclusión al encontrar errores con valores pequeños. Tal es el caso de la fase A con un error del 4,43 % en la máquina de 2400 hp. Para las otras máquinas y fases los errores oscilan en el orden de 0,96 %. El error para las fallas simétricas calculadas con los dos enfoques es el mismo debido a que las expresiones de corriente difieren en su componente de estado estable, y esta al no existir en fallas simétricas, los vectores de corriente se superponen generando así las mismas funciones de corrientes instantáneas.

Para las falla bifásicas se encontró que existe una diferencia importante en el cálculo de las corrientes de las fases no falladas debido a los grandes incrementos de las velocidades posfalla, las cuales están asociadas a las inercias de las diferentes máquinas y por lo tanto a la potencia de las mismas. La máquina al perder carga empieza a aumentar de forma significativa su velocidad, y como aún posee una fase sana, se crea un nuevo punto de operación de estado estable desbalanceado lo que genera cambios importantes en la forma de onda de las corrientes.

En lo que respecta a las fallas monofásicas se pudo observar que las metodologías tienen un mayor grado de exactitud debido a que las diferencias entre las velocidades de prefalla y posfalla son pequeñas, lo que genera corrientes de estado estable muy similares, adicionalemente

las fases que son cortocircuitadas son aquellas que presentan errores menores. Aunque las dos metodologías presentan errores relativamente bajos, aún así el método propuesto presenta mayor precisión en las magnitudes de la corriente transitoria y en los desfases de las señales.

En todas las corrientes de cortocircuito de las fases existe una diferencia en la magnitud respecto a las ondas parámetro encontradas con el modelo QD0. Esto se debe a que durante los primeros instantes siempre hay caídas de velocidad respecto a la velocidad de prefalla lo que se traduce en una disminución de las magnitudes de las corrientes encontradas con el modelo QD0 y por lo tanto la conversión de los vectores espaciales en las componentes instantáneas resultan en magnitudes un poco mayores.

Lo que respecta a los análisis de los cortocircuitos cuando la máquina se encuentra conectada a una fuente desbalanceada se puede decir que ninguno de los dos métodos es lo suficientemente confiable. A pesar de que se pueden encontrar errores pequeños para algunas fases, en otras se obtienen diferencias muy grandes lo que genera desconfianza en los resultados y por lo tanto en las metodologías para estos casos.

Capítulos 3

Al analizar los modelos propuestos de la tensión transitoria junto con el modelo de Howard, y también el modelo clásico es posible concluir lo siguiente: en las fallas trifásicas no es necesario tener una ecuación de tensión transitoria de secuencia negativa ya que las redes de secuencia en una falla simétrica no están conectadas por lo tanto sólo dependen de la red de secuencia positiva. En este caso las dos metodologías propuestas tanto de dos fuentes como de una, generan los mismos valores que las corrientes obtenidas con el modelo clásico; por otra parte el modelo de Howard presenta resultados similares únicamente para la máquina que fue estudiada en el artículo que propuso la metodología.
La Ecuación 3-26 se propuso con la intención de simplificar el cálculo y de mejorar la exactitud del modelo de Howard de tensión, Ecuación 3-30, ya que éstas están compuestas por dos expresiones, una para la fuente de tensión de secuencia positiva y otra para la fuente de tensión de secuencia negativa. Se pudo observar en los resultados obtenidos de las diferentes máquinas y diferentes tipos de fallas, que la metodología propuesta de dos fuentes mejora la exactitud del modelo de Howard; no obstante, esta metodología aún presenta algunos errores, que aunque son pequeños para la mayoría de los casos analizados, se pueden disminuir con el modelo propuesto de una fuente, Ecuación 3-28. Este último modelo no sólo presenta una sola expresión de la ecuación transitoria sino que además de que depende de las inductancias y de la velocidad angular, que son comunes para todos los enfoques, también lo hace del flujo de prefalla del rotor. Esto genera facilidad en el cálculo y un aumento en la precisión, lo que se evidencia en la magnitud de los errores ya que se encuentran en el orden de $10^{-}11$ pu.

Las ecuaciones (3-26), (3-28) y (3-30) cambian la formulación de la tensión transitoria, pero todas dependen de los mismos flujos de la máquina. Es decir que la metodología para el cálculo de los flujos es la misma, sin embargo, como las formulaciones son diferentes, las magnitudes y ángulos cambian, generando así diferencias en los fasores de la corrientes de cortocircuito en estado transitorio.

Las ecuaciones propuestas no dependen directamente de los valores de los vectores propios, de los valores propios, ni del ángulo de falla, como lo hace el modelo de Howard. Para el caso de la metodología propuesta de una fuente sólo hay dependencia de los flujos de las máquina de prefalla, y de los flujos de prefalla y posfalla para la metodología propuesta de dos fuentes. Adicionalemente, se puede decir que la fuente de tensión no es función del ángulo de falla, ya que al representar la máquina en estado transitorio el tiempo inicial de la falla es igual $t_0 = 0\ s$, lo que resulta en una simplificación de las funciones exponenciales.

Capítulo 4

Al analizar un sistema de potencia se encontró que la capacidad de cortocircuito de las barras que tienen una máquina de inducción conectada a ellas, puede variar significativamente dependiendo del enfoque del cálculo de la corriente de cortocircuito que se utilice. Como vimos en el Capítulo 3 la metodología propuesta de una fuente genera los menores errores, y por lo tanto debería ser aquella que se utilice para obtener las corrientes de corto, tanto simétricas como asimétricas. En el caso del sistema de 13 barras se pudo observar que la capacidad de cortocircuito disminuye aproximadamente 7 MVA cuando se utiliza la metodología de Howard para encontrar los valores de la corriente; esto puede generar una mala coordinación de los sistemas de protección y un mal dimensionamiento de los barrajes de las subestaciones.

Trabajo Futuro

Se propone como trabajo futuro realizar las siguientes actividades ya que esto permite complementar la investigación presentada en este documento y promover soluciones para los estudios de cortocircuitos en las máquinas de inducción.

- Realizar análisis más profundos sobre el comportamiento de la máquina de inducción cuando está conectada a sistemas de potencia con tensiones desbalanceadas.
- Realizar análisis más detallados del efecto angular en los fasores de las corrientes de cortocircuito.
- Validar los resultados por medio de simulaciones de laboratorio o comparaciones con información de fallas suministradas por empresas del sector eléctrico.
- Solucionar la ecuación de estados de la máquina de inducción sin asumir que la velocidad del rotor es constante.
- Comparar las metodologías para el cálculo de las corrientes de cortocircuito, con aquellas utilizadas en programas del sector eléctrico.

A. Anexo: Parámetros de simulación de las máquinas de inducción

A continuación se presentan los parámetros de las máquinas de inducción para las simulaciones realizadas en el transcurso de esta tesis.

Tabla A-1.: Parámetros de simulación para las diferentes máquinas

Parámetros	***Potencia (hp)***				
	1	***10***	***20***	***500***	***2400***
Potencia nominal (kW)	0,75	7,46	14,92	373	1816
Tensión nominal (V)	200	230	220	4160	600
Frecuencia (Hz)			60		
Número de polos			4		6
Resistencia de estator (Ω)	3,35	0,22	0,11	3,06	0.0008
Reactancia del estator (Ω)	2,62	0,53	0,21	2,13	0.0173
Resistencia referida del rotor (Ω)	1,99	0,21	0,0764	13,83	0.0020
Reactancia refereida del rotor (Ω)	2,62	0,53	0,21	5,66	0.0143
Reactancia de magnetización (Ω)	61,72	15,21	5,83	179,09	0,7783
Constante de inercia del rotor (s)	2,37	0,7429	3,334	9,53	4,87

A continuación se presentan los parámetros necesarios para realizar el análisis del sistema de 13 barras:

Tabla A-2.: Datos de las máquinas

Motor	V_n ***(kV)***	I_n ***(A)***	S_n ***(kVA)***	P_n ***(kW)***	$\cos\phi$	η	I_{arr}/I_n	$\cos\phi_{arr}$	P_{op} ***(kW)***	Q_{op} ***(kVAR)***
Barra 10	5,2	738,2	6649	5000	0,8	0,94	5	0,3	4000	3000
Barra 11	5,2	738,2	6649	5000	0,8	0,94	5	0,3	2000	1000

Tabla A-3.: Datos de línea

Barra de inicio	Barra final	r Ω/km	x Ω/km	b Ω/km
2	3	0,103	0,403	2,827
3	9	0,113	0,413	2,827
3	8	0,113	0,413	2,827
2	4	0,103	0,403	2,827
4	8	0,113	0,41	2,827
8	7	0,112	0,4	2,827
7	6	0,066	0,382	3,142
5	6	0,141	0,413	2,827
5	2	0,091	0,415	2,827

Tabla A-4.: Datos de los transformadores

Barra de inicio	***Barra final***	V_H ***(kV)***	V_L ***(kV)***	***S (MVA)***	Z_{cc} **%**
1	2	220	65	200	9
9	10	65	5,2	6	8,46
8	11	65	5,2	12	10
8	12	65	16	60	10
13	6	65	8,5	140	10

Tabla A-5.: Datos de las barras

Barra	***Tipo***	P_d	Q_d
1	3	0	0
2	1	0	0
3	1	0	0
4	1	0	0
5	1	0	0
6	1	0	0
7	1	2	2
8	1	0	0
9	1	0	0
10	1	4	3
11	1	2	1
12	1	5	4
13	2	0	0

Tabla A-6.: Datos de los generadores

Generador	P_g ***(MW)***	Q_g ***(MVAR)***
1	0	0
2	40	10

B. Anexo: Diagramas circuitales para los diferentes tipos de fallas

En este apéndice se pueden observar los diferentes tipos de diagramas circuitales cuando se utilizan las metodologías de dos fuentes y las de una fuente.

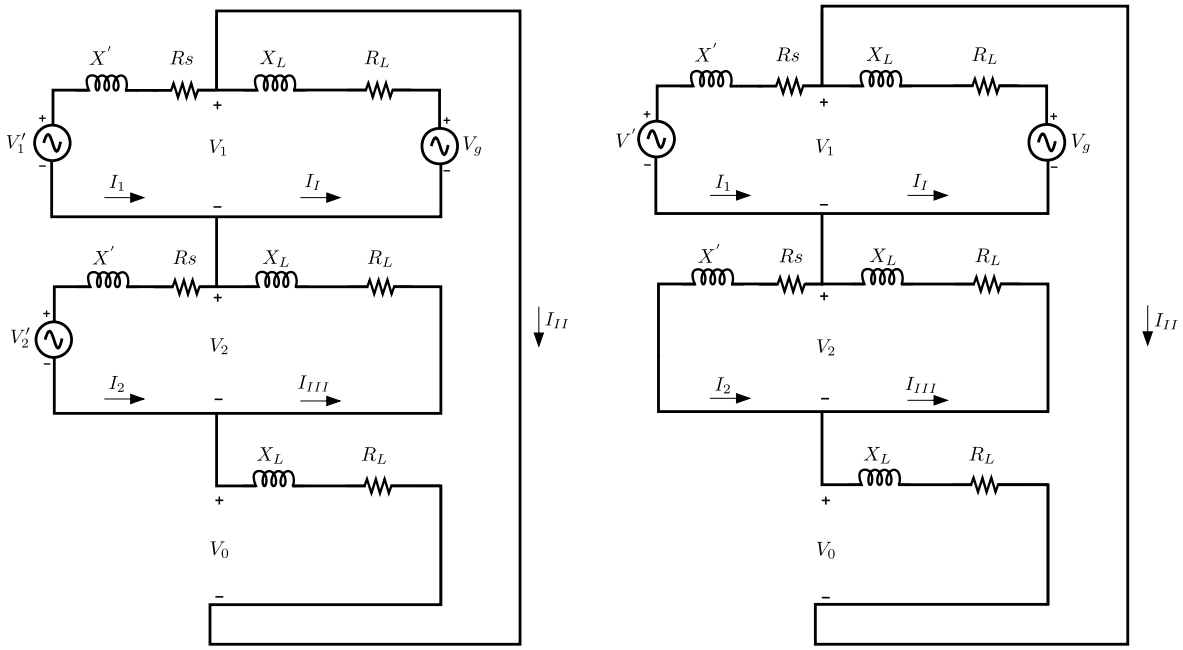
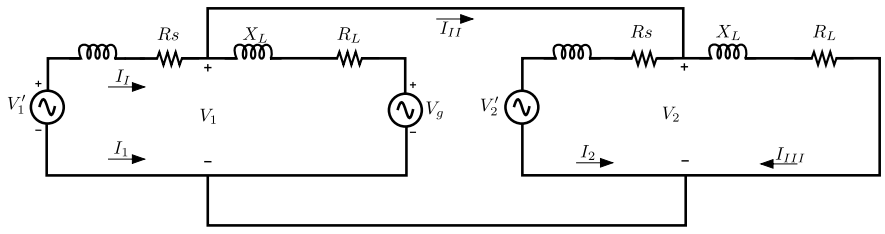
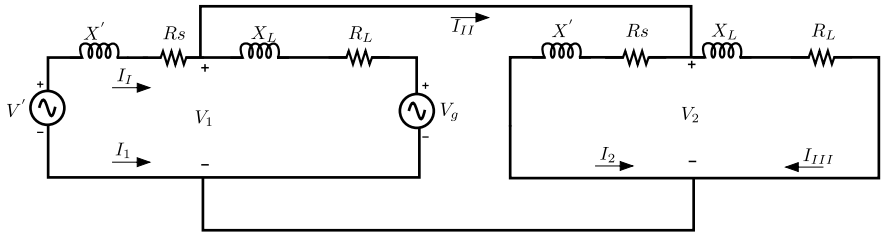


Figura B-1.: Circuitos equivalentes de estado transitorio para fallas monofásicas.

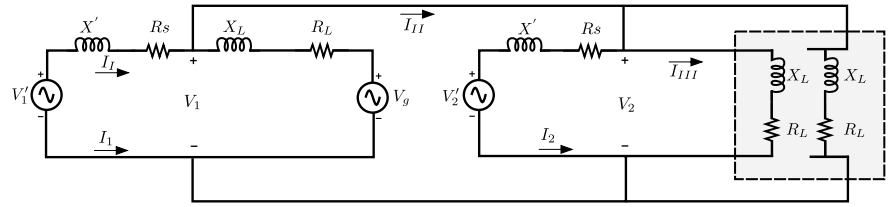


(a)

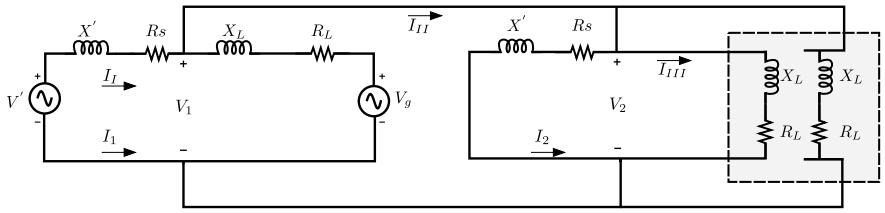


(b)

Figura B-2.: Circuitos equivalentes de estado transitorio para fallas bifasicas.



(a)



(b)

Figura B-3.: Circuitos equivalentes de estado transitorio para fallas bifasicas a tierra.

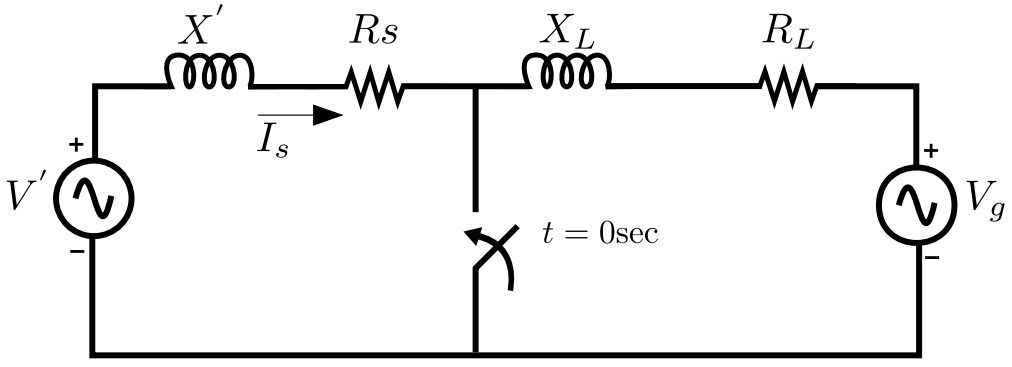


Figura B-4.: Circuito equivalente de estado transitorio para fallas trifásicas.

Bibliografía

[1] E. Clarke, *Circuit analysis of AC power systems.* Wiley, 1943, vol. 1.

[2] A. A. Sallam and O. P. Malik, "Short-circuit studies," *Electric Distribution Systems*, pp. 107–162.

[3] S. Soman, S. Khaparde, and S. Pandit, "Short circuit analysis," in *Computational Methods for Large Sparse Power Systems Analysis.* Springer, 2002, pp. 179–212.

[4] P. M. Anderson and P. Anderson, *Analysis of faulted power systems.* IEEE press New York, 1995.

[5] A. R. Bergen, *Power systems analysis.* Pearson Education India, 2009.

[6] Z. Maljković, M. Cettolo, and M. Pavlica, "Induction motor's contribution to short circuit current," in *IEEE International Electric Machines and Drives Conference, IEMDC'99*, 1999.

[7] L. Yu and K. N. Wong, "Open and short circuit behavior of induction motors," in *Petroleum and Chemical Industry Conference, 1989, Record of Conference Papers.. Industrial Applications Society, 36th Annual.* IEEE, 1989, pp. 35–40.

[8] K. Maki, S. Repo, and P. Jarventausta, "Effect of wind power based distributed generation on protection of distribution network," 2004.

[9] S. Kalsi, B. Adkins, and D. Stephen, "Calculation of system-fault currents due to induction motors," in *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 118, no. 1. IET, 1971, pp. 201–215.

[10] J. L. Blackburn, *Symmetrical components for power systems engineering.* CRC Press, 1993.

[11] N. Tleis, *Power systems modelling and fault analysis: theory and practice.* Newnes, 2007.

[12] T. Sulawa, Z. Zabar, D. Czarkowski, L. Birenbaum, S. Lee, and Y. TenAmi, "Short circuit current of induction generators," in *Circuits and Systems, 2007. ISCAS 2007. IEEE International Symposium on*, May 2007, pp. 2431–2434.

[13] J. Das, *Power system analysis: short-circuit load flow and harmonics*. CRC press, 2011.

[14] E. Muljadi and V. Gevorgian, "Short-circuit modeling of a wind power plant," in *Power and Energy Society General Meeting, 2011 IEEE*. IEEE, 2011, pp. 1–9.

[15] J. Martinez, P. Kjar, P. Rodriguez, and R. Teodorescu, "Short circuit signatures from different wind turbine generator types," in *Power Systems Conference and Exposition (PSCE), 2011 IEEE/PES*. IEEE, 2011, pp. 1–7.

[16] T. Kawady, C. Feltes, I. Erlich, and A. Taalab, "Protection system behavior of dfig based wind farms for grid-faults with practical considerations," in *Power and Energy Society General Meeting, 2010 IEEE*. IEEE, 2010, pp. 1–6.

[17] D. F. Howard, T. G. Habetler, and R. G. Harley, "Experimental study on the short-circuit contribution of induction machines," in *Electric Machines & Drives Conference (IEMDC), 2013 IEEE International*. IEEE, 2013, pp. 960–967.

[18] J. Morren and S. W. De Haan, "Short-circuit current of wind turbines with doubly fed induction generator," *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol. 22, no. 1, pp. 174–180, 2007.

[19] W. Suwanwej and A. Kunakorn, "Estimation of short circuit current due to a group of induction motors using an aggregation model," in *Power System Technology, 2004. PowerCon 2004. 2004 International Conference on*, vol. 1, Nov 2004, pp. 559–563 Vol.1.

[20] V. Gevorgian, M. Singh, and E. Muljadi, "Symmetrical and unsymmetrical fault currents of a wind power plant," in *Power and Energy Society General Meeting, 2012 IEEE*, July 2012, pp. 1–8.

[21] D. Howard, T. Habetler, and R. Harley, "Improved sequence network model of wind turbine generators for short-circuit studies," *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol. 27, no. 4, pp. 968–977, Dec 2012.

[22] D. F. Howard, T. M. Smith, M. Starke, and R. G. Harley, "Short circuit analysis of induction machines-wind power application," in *Transmission and Distribution Conference and Exposition (T&D), 2012 IEEE PES*. IEEE, 2012, pp. 1–8.

[23] D. F. Howard, "Short-circuit currents in wind-turbine generator networks," Ph.D. dissertation, Georgia Institute of Technology, 2013.

[24] J. A. Gonzalez-Vasquez, N. Toro, and J. F. Gutierrez, "Comparison between the improved sequence network model of wind turbines and the classical model based on sequence networks for short-circuit studies," in *PowerTech, 2015 IEEE Eindhoven*, June 2015, pp. 1–6.

[25] D. Kothari, I. Nagrath, S. A. M. Sarmiento, and V. G. y Pozo, *Sistemas eléctricos de potencia*. McGraw-Hill Interamericana, 2008.

[26] "Recommended practice for calculating ac short-circuit currents in industrial and commercial power systems," *IEEE Std 551-2006 [The Violet Book]*, pp. 1–308, Nov 2006.

[27] J. J. Grainger, W. D. Stevenson, and C. L. Sousa, *Análisis de sistemas de potencia*. McGraw-Hill, 1996.

[28] D. F. Howard, J. Restrepo, T. Smith, M. Starke, J. Dang, and R. Harley, "Calculation of fault current contribution of type i wind turbine-generators," in *Power and Energy Society General Meeting, 2011 IEEE*. IEEE, 2011, pp. 1–7.

[29] H. Saadat, *Power system analysis*. WCB/McGraw-Hill, 1999.

[30] "Ieee standard test procedure for polyphase induction motors and generators," *IEEE Std 112-2004 (Revision of IEEE Std 112-1996)*, pp. 1–79, 2004.

[31] T. Sulawa, Z. Zabar, D. Czarkowski, Y. TenAmi, L. Birenbaum, and S. Lee, "Evaluation of a 3-phase bolted short-circuit on distribution networks having induction generators at customer sites," *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 22, no. 3, pp. 1965–1971, July 2007.

[32] I. Mota, I. Kopcak, A. Baleeiro, and B. Alvarenga, "Impactos da contribuição de curto-circuito da máquina de indução em instalações elétricas."

[33] M. Morcos and J. Gomez, "Distributed generation: Short circuit current supplied for induction generators," in *Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America, 2008 IEEE/PES*, Aug 2008, pp. 1–5.

[34] M. S. Sarma, *Electric machines: Steady-state theory and dynamic performance*. West Publishing Company, 1994.

[35] T. Zheng, S.-T. Cha, Y.-H. Kim, P. A. Crossley, S. H. Lee, and Y. C. Kang, "Design and evaluation of a protection relay for a wind generator based on the positive-and negative-sequence fault components," *Journal of Electrical Engineering & Technology*, vol. 8, no. 5, pp. 1029–1039, 2013.

[36] J. C. Gomez, S. M. Nesci, and F. A. Barbero, "Short-circuit currents supplied for induction generators," in *Electricity Distribution - Part 1, 2009. CIRED 2009. 20th International Conference and Exhibition on*, June 2009, pp. 1–4.

[37] W. C. Huening Jr, "Calculating short-circuit currents with contributions from induction motors," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, no. 2, pp. 85–92, 1982.

[38] W. Wagner, "Short-circuit contribution of large induction motors," in *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 116, no. 6. IET, 1969, pp. 985–990.

[39] P. Vas, *Electrical machines and drives: a space-vector theory approach*. Oxford University Press, USA, 1992, vol. 25.

[40] F. Sulla, J. Svensson, and O. Samuelsson, "Symmetrical and unsymmetrical short-circuit current of squirrel-cage and doubly-fed induction generators," *Electric Power Systems Research*, vol. 81, no. 7, pp. 1610 – 1618, 2011. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779611000794

[41] P. C. Krause, O. Wasynczuk, S. D. Sudhoff, and S. Pekarek, *Analysis of electric machinery and drive systems*. John Wiley & Sons, 2013, vol. 75.

[42] C.-M. Ong, *Dynamic simulation of electric machinery: using MATLAB/SIMULINK*. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, 1998, vol. 5.

[43] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, S. D. Umans, A. E. Fitzgerald, A. E. Fitzgerald, and E. Engineer, *Electric machinery*. McGraw-Hill New York, 2003, vol. 5.

[44] D. O'Kelly and S. Simmons, "Introduction to generalized electrical machine theory," 1968.

[45] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, *Numerical mathematics*. Springer, 2007, vol. 37.

[46] K. Ogata and Y. Yang, "Modern control engineering," 1970.

[47] A. Feijoo and J. Cidras, "Modeling of wind farms in the load flow analysis," *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 15, no. 1, pp. 110–115, Feb 2000.

[48] K. Nandigam and B. Chowdhury, "Power flow and stability models for induction generators used in wind turbines," in *Power Engineering Society General Meeting, 2004. IEEE*, June 2004, pp. 2012–2016 Vol.2.

[49] Z. W. Z. Wei, W. Z. W. Zhinong, and S. G. S. Guoqiang, "Power flow calculation for power system including offshore wind farm," *2009 International Conference on Sustainable Power Generation and Supply*, no. 50877024, pp. 1–6, 2009.

[50] Y. Liu, W. Wang, and L. Xu, "Research on power flow algorithm for power system including wind farm," *... Machines and Systems, ...*, pp. 2551–2555, 2008. [Online]. Available: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs{_}all.jsp?arnumber=4771181

[51] L. M. Castro, C. R. Fuerte-Esquivel, and J. H. Tovar-Hernández, "A unified approach for the solution of power flows in electric power systems including wind farms," *Electric Power Systems Research*, vol. 81, no. 10, pp. 1859–1865, 2011. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2011.05.007

[52] K. C. Divya and P. S. N. Rao, "Models for wind turbine generating systems and their application in load flow studies," *Electric Power Systems Research*, vol. 76, no. 9-10, pp. 844–856, 2006.

[53] NEPLAN, "Ayuda Software NEPLAN 5.5.5.R1," NEPLAN, Erlenbach, Tech. Rep., 2015. [Online]. Available: www.neplan.com

[54] International, Electrotechnical, and Commission, "International Standard IEC 60909-0," Ginebra, Tech. Rep., 2001. [Online]. Available: www.iec.ch